Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
"Національний гірничий університет"

Електротехнічний факультет

Кафедра **Метрології та інформаційно-вимірювальних технологій**

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА
Магістерської дисертації

галузь знань **15 – Автоматизація та приладобудування**

спеціальність **152 – Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка**

освітній рівень **магістр**

кваліфікація **2149.2 Інженер з метрології**

на тему **Дослідження методів інтерполяції при обробці результатів сумісних вимірювань**

Виконавець:
студент II курсу, групи 152м-16-1

Ткаченко К.І.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівники/консультанти	Прізвище, ініціали	Оцінка	Підпис
Проекту	Глухова Н.В		
розділів:			
Розділ 1	Глухова Н.В		
Розділ 2	Глухова Н.В		
Розділ 3	Глухова Н.В		
Розділ 4	Дементьєва Н.В.		

Рецензент			

Нормоконтроль	Харламова Ю.М.		

Дніпро
2018

Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
"Національний гірничий університет"

ЗАТВЕРДЖЕНО:
завідувач кафедри
Метрології та інформаційно-вимірювальної техніки
(повна назва)

_______________ Корсун В.І.
(підпис) (прізвище, ініціали)

“ ________ " січня 2018 року

ЗАВДАННЯ

на виконання кваліфікаційної роботи магістра (магістерської дисертації)

спеціальності 152 – Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка

студенту групи 152м-16-1 Ткаченко К.І.
(група) (прізвище та ініціали)

Тема магістерської дисертації Дослідження методів інтерполяції при обробці результатів сумісних вимірювань

1 ПІДСТАВИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ РОБОТИ

Наказ ректора ДВНЗ "НГУ" від 31 жовтня 2017 р № 1806-л

2 МЕТА ТА ВИХІДНІ ДАНІ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ РОБІТ

Об’єкт досліджень нелінійні електронні елементи

Предмет досліджень Розробка методів обробки результатів сумісних вимірювань

Мета НДР Вирішення проблеми аналізу та удосконалення методів обробки результатів сумісних вимірювань на основі використання методів інтерполяції

Вихідні дані для проведення роботи Результати переддипломної практики

3 ОЧІКУВАНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Наукова новизна Вирішення проблеми створення системи обробки результатів сумісних вимірювань

Практична цінність роботи полягає в удосконаленні системи обробки результатів вимірювань, що зменшить час обробки результатів вимірювань

4 ВИМОГИ ДО РЕЗУЛЬТАТІВ ВИКОНАННЯ РОБОТИ:

Повинні відповідати держстандартам України та ISO

5 ЕТАПИ ВИКОНАННЯ РОБІТ

Найменування етапів робіт	**Строки виконання робіт (початок-кінець)**
Підготовчий. Збір матеріалів для дипломної роботи.	
Проведення огляду літературних джерел з тематики методів інтерполяції та обробки результатів сумісних вимірювань.	
Проведення натурного експерименту, аналіз методів інтерполяції та обгрунтування кращого з них.	
Програмна реалізація алгоритмів інтерполювання у програмному середовищі.	
Техніко-економічне обгрунтування програмного забезпечення для обробки результатів сумісних вимірювань.Висновки.	

6 РЕАЛІЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ЕФЕКТИВНІСТЬ

Економічний ефект

Соціальний ефект Задоволення потреб промисловості та населення

7 ДОДАТКОВІ ВИМОГИ

Завдання видав ____________ Глухова Н.В.
(підпис) (прізв ище,ініціали)

Завдання прийняв до виконання ____________ Ткаченко К.І.
(підпис) (прізв ище,ініціали)

Дата видачі завдання: 04.09.2017

Термін подання дисертації до ЕК .01.2018

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка магістерської дисертації складається з: 82 стор.,4 табл., 24 рисунків, 13 літературних джерел.

Актуальність теми. Удосконалення методів обробки результатів сумісних вимірювань.

Мета роботи. Вирішення проблеми аналізу та удосконалення методів обробки результатів сумісних вимірювань на основі використання методів інтер- поляції.

Методологія і методи дослідження, що застосовані в магістерській дисертації, включають в себе загальнонаукові теоретичні методи дослідження: аналізу; синтезу; моделювання; системного аналізу.

Предметом дослідження є розробка методів обробки результатів сумісних вимірювань.

Об'єктами дослідження є нелінійні електронні елементи.

Наукова новизна полягає у вирішенні проблеми створення системи обробки результатів сумісних вимірювань.

Теоретичні, методологічні та інформаційні основи дослідження. Інфор- маційну базу дослідження склали матеріали наукових досліджень фахівців, нау- кова, навчальна та методична література, матеріали періодичних видань, патентна інформація, відомості з мережі Інтернет.

Теоретична значимість роботи складається з опису процесу проведення та результатів натурного експерименту, огляду основних методів інтерполяції і визначення переваг та недоліків кожного з них.

Практична значимість роботи полягає в удосконаленні системи обробки результатів вимірювань, що зменшить час обробки результатів вимірювань.

Ключові слова: АЛГОРИТМ, БАГАТОЧЛЕН, ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, МЕТОД, ПОЛІ- НОМ, ФУНКЦІЯ, MATLAB, MATHCAD, LABVIEW

ABSTRACT

The explanatory note of the master's dissertation consists of: p. , tabl. , drawings, literary sources.

Actuality of theme. Improvement of the methods of processing the results of compatible measurements.

The purpose of the work. Solving the problem of analysis and improvement of methods for processing the results of compatible measurements based on the use of interpolation methods.

The methodology and research methods used in the dissertation work include general scientific theoretical methods of research: analysis; synthesis; modeling; system analysis.

The subject of the study is the development of methods for processing the results of compatible measurements.

Objects of research there are nonlinear electronic elements.

The scientific novelty consists in solving the problem of creating a system for processing the results of compatible measurements.

Theoretical, methodological and information bases of research. The information base of the study consisted of materials of scientific research of specialists, scientific, educational and methodical literature, materials of periodicals, patent information, information from the Internet.

The theoretical significance of the work consists of a description of the process of carrying out and the results of a field experiment, an overview of the main methods of interpolation and the identification of the advantages and disadvantages of each of them.

The practical significance of the work is to improve the system of measuring the results of the measurements, which will reduce the processing time of the measurement results.

Keywords: ALGORITHM, MULTIPLE, INTERPOLATION, METHOD, POL- YUM, FUNCTION, MATLAB, MATHCAD, LABVIEW

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний стан опрацювання результатів метрологічних вимірювань характеризується переходом до використання строгих математичних методів та моделей, застосуванням автоматизованих систем на всіх стадіях збирання, обробки та розповсюдження даних. Спектр задач математичної обробки результатів метрологічних вимірювань включає обробку вимірів однієї величини, інтерполяцію та апроксимацію одержаних значень функцій, числового інтегрування та інтерпретацію результатів вимірювань та їх функцій. Для рішення цих задач застосовуються різні числові методи: ймовірнісно-статистичний аналіз результатів вимірювань та їх похибок, метод найменших квадратів, прямі та ітераційні методи лінійної алгебри, методи лінійної, гармонічної, середньоквадратичної, чебишевської, сплайнової та інших методів інтерполяції та апроксимації та ін.

Враховуючи різноманітність задач математичної обробки результатів метрологічних вимірювань, нагальною є проблема розробки уніфікованих високоточних математичних методів та моделей, здатних на підставі єдиного методологічного підходу об’єднати рішення широкого спектра задач в єдине обчислювальне середовище.

Одним із засобів вирішення науково-прикладних проблем є порівняння, залучення та використання значних науково-технічних досягнень з інших галузей знань. Для вирішення проблеми удосконалення математичної обробки результатів метрологічних вимірювань доцільно досліджувати не тільки сучасні числові методи прикладної математики, а й інші пов’язані з використанням цих методів області інженерних знань. Вирішення проблеми створення уніфікованих високоточних математичних методів та моделей обробки результатів метрологічних вимірювань на основі використання методів інтерполяції є головним напрямом досліджень цієї роботи.

1 ВИЗНАЧЕННЯ ОБ’ЄКТА ДОСЛІДЖЕННЯ ТА МЕТОДІВ ВИМІРЮВАННЯ

1.1 Метод сумісних вимірювань

Метод сумісних вимірювань використовується в тих випадках, коли між величинами існує закономірна залежність, але рівняння зв'язку невідомо, або коли на цю залежність впливають важко регульовані чинники. Він полягає в тому, що спочатку за допомогою сумісних вимірювань встановлюють характер залежності між досліджуваними величинами, виводять рівняння зв'язку, а потім застосовують розрахунковий, шкальний або інші методи. Методом сумісних вимірювань широко користуються в товарознавчих дослідженнях, особливо на стадії проектування та розробки нових продуктів, проведення державних і галузевих випробувань продовольчих товарів, нових методів транспортування, пакування та зберігання. Особливістю сучасного етапу розвитку техніки вимірювань в товарознавстві, метрології та інших галузях науки є все більше впровадження непрямих методів, заснованих на нових фізичних явищах (переважно атомно-молекулярних), які забезпечують високу точність і чутливість, збільшують діапазон вимірювань там, де прямі методи не дозволяють цього досягти. Але на шляху їх використання стримувальним чинником стають методичні похибки, які виникають через неточність (неадекватність) рівнянь зв'язку, описуваних ними залежностей, непостійність умов вимірювань, спотворення вимірювального сигналу при його перетвореннях, передачі лініями зв'язку і в системах обробки. Тому при використанні і прямих, і, особливо, непрямих методів, дуже важливою умовою отримання точних результатів є безумовне дотримання вимог методики виконання вимірювань.

Сумісне вимірювання- це непряме вимірювання, в якому значення декількох одночасно вимірюваних різнорідних величин отримують розв’язанням рівнянь, які пов’язують їх з іншими величинами, що вимірюються прямо чи опосередковано.

У даній роботі, в якості об’єкта дослідження була обрана вольт-амперна характеристика нелінійних елементів, на прикладі якої роздивимось більш детально методи і засоби вимірювання та обробки результатів сумісних вимірювань.

Вольт-амперна характеристика - залежність струму, що проходить крізь двуполюсник від напруги на цьому двуполюснику. Описує поведінку двухполюсника на постійному струмі. Може бути представлена у вигляді функції, що виражає (описує) цю залежність, а також - графіком цієї функції. Найчастіше розглядають ВАХ нелінійних елементів, оскільки для лінійних елементів ВАХ є прямою лінію (описується законом Ома) і не представляє особливого інтересу.

Характерні приклади елементів, що володіють істотно нелінійної ВАХ:

- діод;
- тиристор;
- стабілітрон.

Вольт-амперна характеристика зображується зазвичай у вигляді графіка, в якому напруга відкладається вздовж осі абсцис, а струм — вздовж осі ординат.

Для побудови вольт-амперної характеристики нелінійного елемента необхідно за допомогою регульованого блоку живлення пропускати через нелінійний елемент напругу, і дивитися одночасно значення струму.

Таким чином, в результаті проведення натурного експерименту отримуємо залежності між досліджуваними параметрами у вигляді таблиці, тобто отримуємо, так звану, табличну функцію[1].

Далі за цією табличною функцією необхідно вести науково-дослідні розрахунки. При такій постановці задачі моделювання потрібно замінити табличну функцію аналітичної. Для цієї мети використовуються методи апроксимації та інтерполяції.

1.2 Аналітичне представлення вольт-амперних характеристик

Часто необхідно мати аналітичні вирази для вольт-амперних характеристик нелінійних елементів. Ці вирази можуть лише приблизно представляти ВАХ, оскільки фізичні закономірності, яким підкорюються залежності між напругами і струмами в електронних і напівпровідникових приладах, не виражаються аналітично. Завдання наближеного аналітичного представлення функції, заданої графічно або таблицею значень, в заданих межах зміни її аргументу (незалежною змінною) передбачає, по-перше, вибір апроксимуючої функції, тобто функції, за допомогою якої приблизно представляється задана залежність, і, по-друге, вибір критерію оцінки «близькості» цієї залежності і функції , що її апроксимує . Як апроксимуючі функції використовуються, найчастіше, поліноми алгебри, деякі дробові раціональні і трансцендентні функції або сукупність відрізків прямих ліній.

Вважатимемо, що ВАХ нелінійного елементу i = F(u) задана графічно, тобто визначена в кожній точці інтервалу Umin u Umax, і являє собою однозначну безперервну функцією змінної u. Тоді завдання аналітичного представлення вольт-амперної характеристики може розглядатися як завдання апроксимації заданої функції φ (x) вибраною апроксимуючою функцією f(x).

Про близькість апроксимуючої функції f(x) та функції φ (x), що апроксимується або, іншими словами, про похибку апроксимації, зазвичай судять по найбільшому абсолютному значенню різниці між цими функціями в інтервалі апроксимації a $\leqslant$ x $\leqslant$ b, тобто за величиною:

$$\Delta = \max|f(x) - \xi(x)| \tag{1.1}$$

Часто критерієм близькості обирається середньоквадратичне значення різниці між зазначеними функціями в інтервалі апроксимації, тобто величина:

$$\Delta = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - \xi(x)]^2\, dx \tag{1.2}$$

Іноді під близькістю двох функцій f (x) і φ (x) розуміють збіг в заданій точці x = X_0 самих функцій і n + 1 їх похідних.

Найбільш поширеним способом наближення аналітичної функції до заданої є інтерполяція (метод вибраних точок), коли домагаються збігу функцій f (x) і φ (x) в обраних точках (вузлах інтерполяції) X_k, $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Похибка апроксимації може бути досягнута тим меншою, чим більше число змінних параметрів входить в апроксимуючу функцію, тобто, наприклад, чим вище ступінь апроксимуючого полінома або чим більше число відрізків прямих містить апроксимуюча лінійно-ламана функція. Одночасно з цим, природно, зростає обсяг обчислень як при вирішенні задачі апроксимації, так і при подальшому аналізі нелінійного ланцюга. Простота цього аналізу на рівні з особливостями функції, що апроксимується в межах інтервалу апроксимації служить одним з найважливіших критеріїв при виборі типу апроксимуючої функції.

У завданнях апроксимації вольт-амперних характеристик електронних і напівпровідникових приладів прагнути до високої точності їх відтворення, як правило, немає необхідності зважаючи на значний розкид характеристик приладів від зразка до зразка і істотного впливу на них дестабілізуючих факторів, наприклад, температури в напівпровідникових приладах. У більшості випадків достатньо «правильно» відтворити загальний усереднений характер залежності $i = F(u)$ в межах її робочого інтервалу.

Апроксимація - це заміна вихідної функції $f(x)$ функцією $\varphi(x)$ так, щоб відхилення $f(x)$ від $\varphi(x)$ в заданій області було найменшим. Функція $\varphi(x)$ називається апроксимуючої.

Якщо початкова функція $f(x)$ задана таблично (дискретним набором точок), то апроксимація називається дискретною. Якщо початкова функція $f(x)$ задана аналітично (на відрізку), то апроксимація називається безперервної або інтегральної.

Інтерполяція - це заміна вихідної функції $f(x)$ функцією $\varphi(x)$ так, щоб $\varphi(x)$ точно проходила через точки вихідної функції $f(x)$. Інтерполяція ще називається точковою апроксимацією [2].

1.3 Обробка результатів сумісних вимірювань. Вимірювання параметрів залежностей між фізичними величинами

Наближення (апроксимація) результатів експериментів функціями

Сумісні вимірювання використовуються для знаходження функціональних залежностей між декількома фізичними величинами, в найпростішому між двома X та Y (рис.1.1) Y(X)= F(X) .

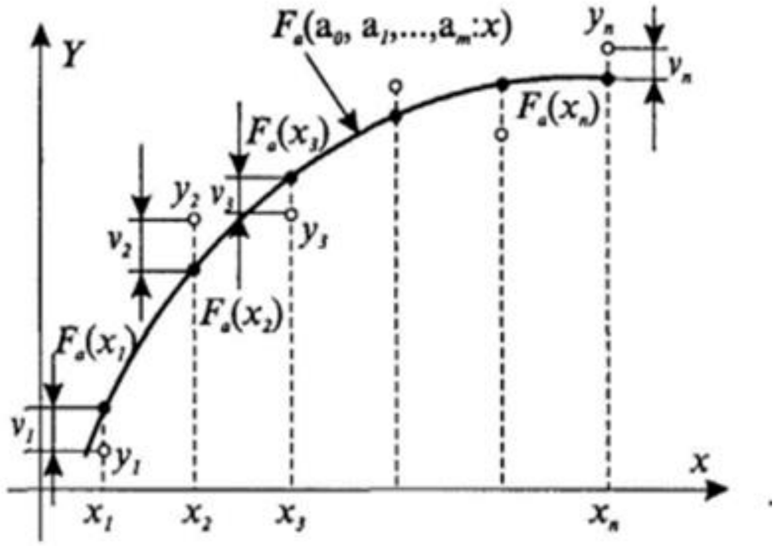


Рисунок 1.1- До апроксимації результатів експериментів

Загалом ця функція може бути як лінійною, так і нелінійною відносно як незалежного аргументу X, так і шуканих коефіцієнтів. Апроксимаційну функцію :

$$Y(X)= F_a[a_0,a_1,\dots,a_{m-1};X] \tag{1.3}$$

розглядають як модель справжньої функціональної залежності Y(X) і вона є функцією m-невідомих коефіцієнтів $a_0,a_1,\dots,a_{m-1}$,які необхідно знайти під час обробки результатів сумісних вимірювань. Внаслідок відмінності апроксимаційної функції від справжньої залежності (навіть за відсутності похибок вимірювань) існує методична похибка апроксимації (наближення), тобто похибка прийнятої моделі функціональної залежності:

$$\Delta_a(X)= F_a[a_0,a_1,\dots,a_{m-1};X] - Y(X) \tag{1.4}$$

Кажуть, що модель є відповідною чи адекватною, якщо похибкою моделі чи апроксимації можна знехтувати, або вона не перевищує заданого допустимого значення $\Delta_{а,доп}$:

$$|\Delta_a(X)| \leq \Delta_{а,доп} \tag{1.5}$$

За умови адекватної моделі, для знаходження коефіцієнтів апроксимуючої функції для заданих n значень аргументу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і вимірюють відповідні їм значення функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в результаті чого формують систему рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = F_a[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}; x_1]; \\ y_2 = F_a[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}; x_2]; \\ \quad\ldots \qquad\qquad \ldots \\ y_n = F_a[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}; x_n]; \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

розв'язками якої є шукані коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$. При цьому кількість рівнянь n системи (кількість вимірювань n пар аргумент-функція) має бути не меншою за кількість невідомих коефіцієнтів m , тобто $n \geq m$.

Очевидно, що в загальному випадку результати вимірювань спотворені різного роду похибками . Тому виникає проблема побудови «найкращої» за даних умов апроксимаційної залежності.

Метод найменших квадратів

На практиці шукану залежність будують так, щоб мінімізувати певну функцію її відхилень від експериментальних точок (рис.1.1) :

$$v_i = F_a[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}; X] - y_i \tag{1.7}$$

при цьому широко вживається критерій мінімуму суми квадратів відхилень шуканої функції від експериментальних точок , тобто:

$$\mathrm{MIN}\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right\} \tag{1.8}$$

Завдяки тому, що за цим критерієм мінімізується сума квадратів відхилень шуканої функції від експериментальних точок ,то він отримав назву методу найменших квадратів (МНК).

Як відомо, для аналітичного знаходження параметрів, при яких функція набуває мінімуму, необхідно спочатку обчислювати похідні за всіма параметрами функції, далі прирівняти їх до нуля і, нарешті розв'язати отриману систему рівнянь. Оскільки похідна від квадрату є однозначною лінійною функцією відносно коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$, задача апроксимації зводиться до розв'язування системи лінійних рівнянь .

Лінійна апроксимація

Найпростішою є лінійна апроксимація $y(x)=a_0+a_1x$ (рис.1.2).

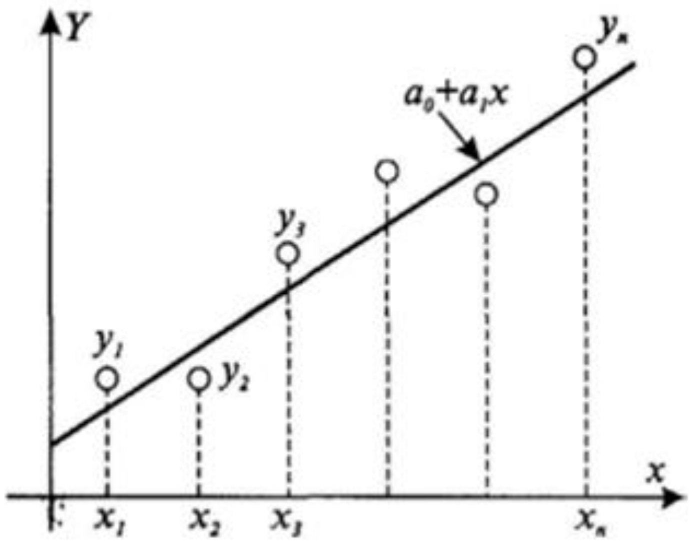


Рисунок 1.2-Лінійна апроксимація МНК

В цьому випадку відхилення i-ї точки описується виразом $v_1=a_0 + a_1x_i - y_i$, і умова мінімуму суми квадратів відхилень набирає вигляду :

$$\mathrm{MIN}\left\{V=\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right\}=\mathrm{MIN}\left\{V=\sum_{i=1}^{n}(a_0+a_1x_i-y_i)^2\right\}, \qquad (1.9)$$

яка досягається при значеннях $\widehat{a_0},\widehat{a_1}$ коефіцієнтів, які будуть щораз іншими для іншого набору результатів вимірювань.

Для знаходження умови мінімуму беруть похідні по кожному з коефіцієнтів $\widehat{a_0},\widehat{a_1}$ і прирівнюють їх до нуля :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \widehat{a_0}}&=2\textstyle\sum_{i=1}^{n}(\widehat{a_0}+\widehat{a_1}x_i-y_i)=0;\\ \frac{\partial V}{\partial \widehat{a_1}}&=2\sum_{i=1}^{n}(\widehat{a_0}+\widehat{a_1}x_i-y_i)x_i=0;\end{aligned}\right\} \qquad (1.10)$$

Після розкриття операції підсумовування та виконання перестановок, отримують систему лінійних рівнянь відносно оцінок шуканих коефіцієнтів $\widehat{a_0},\widehat{a_1}$:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{a_0}n+\widehat{a_1}\textstyle\sum_{i=1}^{n}x_i&=\textstyle\sum_{i=1}^{n}y_i\,;\\ \widehat{a_0}\sum_{i=1}^{n}x_i+\widehat{a_1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2&=\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\;;\end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

Або

$$\left.\begin{aligned}\widehat{a_0}+\widehat{a_1}\overline{x}&=\overline{y}\,;\\ \widehat{a_0}\overline{x}+\widehat{a_1}\overline{x^2}&=\overline{yx}\,;\end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

де, $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ – середнє значення аргументів;

$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ - середнє значення квадратів аргументів;

$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ - середнє значення експериментальних значень функції;

$\overline{yx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ - середнє значення добутків експериментальних значень функції на значення відповідних аргументів.

Розв'язанням цієї системи є оцінки коефіцієнтів функції:

$$\widehat{a_0} = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{y \cdot x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \qquad (1.13)$$

$$\widehat{a_1} = \frac{\overline{xy} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \qquad (1.14)$$

Якщо відомі дисперсії $\sigma_{\Delta y}^2$ випадкових похибок вимірювання значень функції, то дисперсії знайдених коефіцієнтів можна порахувати за виразами :

$$\sigma_{\widehat{a_0}}^2 = \frac{\overline{x^2}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \frac{\sigma_{\Delta y}^2}{n} \qquad (1.15)$$

$$\sigma_{\widehat{a_1}}^2 = \frac{1}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \frac{\sigma_{\Delta y}^2}{n} \qquad (1.16)$$

які зменшуються зі збільшенням кількості експериментальних точок.

Загалом похибки знайдених коефіцієнтів є корельованими між собою , при чому коефіцієнт кореляції між ними становить $R_{a_0 a_1} = \frac{\bar{x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \frac{\sigma_{\Delta y}^2}{n}$.

З останнього випливає , що кореляція поміж коефіцієнтами буде відсутня в разі нульового середнього значення аргументів $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, тобто, їх симетрії відносно початку координат.

Довірчі границі похибок (за довірчої ймовірності $P_{дов}$) (невизначеність) отриманих оцінок коефіцієнтів функції знаходять за виразом :

$$a_j = \hat{a_j} \pm t(n - m, P_{дов})\sigma_{a_j} \quad (1.17)$$

де $t(n - m, P_{дов})$- квантиль розподілу Стьюдента з числом ступенів вільності $n - m$. Якщо дисперсія випадкових похибок $\sigma^2_{\Delta y}$ наперед невідома, то її оцінюють під час обробки результатів [3].

1.4 Математична постановка задачі інтерполювання

В економіці і техніці постійно приходиться зіштовхуватися з необхідністю обчислення значень функції $y=f(x)$ в точках x_i, відмінних від значень аргументу, фіксованих в таблиці експериментальних досліджень. Крім того, в деяких випадках, незважаючи на те, що аналітичний вираз функції $y=f(x)$ відомий, він є занадто складним і незручним для подальших математичних перетворень. Подібні задачі формалізуються як задачі інтерполювання.

Нехай на відрізку $[a,b]$ функція $y=f(x)$ задана системою точок $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$, де значення $x_1,x_2,\ldots x_n$ називаються вузлами інтерполяції. Необхідно знайти аналітичну залежність $Q(x)$, співпадаючої у вузлах інтерполяції зі значеннями заданої функції,

$y_0=Q(x_0)=f(x_0)$, $y_1=Q(x_1)=f(x_1),\ldots$, $y_n=Q(x_n)=f(x_n)$ тобто процес обчислення значень функції $Q(x)$ в точках x_i, відмінних від вузлів інтерполяції, називають інтерполюванням функції $f(x)$.

Якщо аргумент x знаходиться за межами відрізка інтерполювання $[x_0,x_n]$, то задача визначення значення функції $Q(x)$ в точці x називається екстраполюванням.

Слідує відмітити, що задача інтерполювання стає однозначною, якщо в якості функції $Q(x)$ вибрати багаточлен $Q_n(x)$ степені не вище n, такий, що $Q_n(x_0)=y_0$, $Q_n(x_1)=y_1$, …, $Q_n(x_n)=y_n$. Багаточлен $Q_n(x)$, що задовольняє цим умовам, називають інтерполяційним багаточленом, а відповідні формули – інтерполяційними формулами.

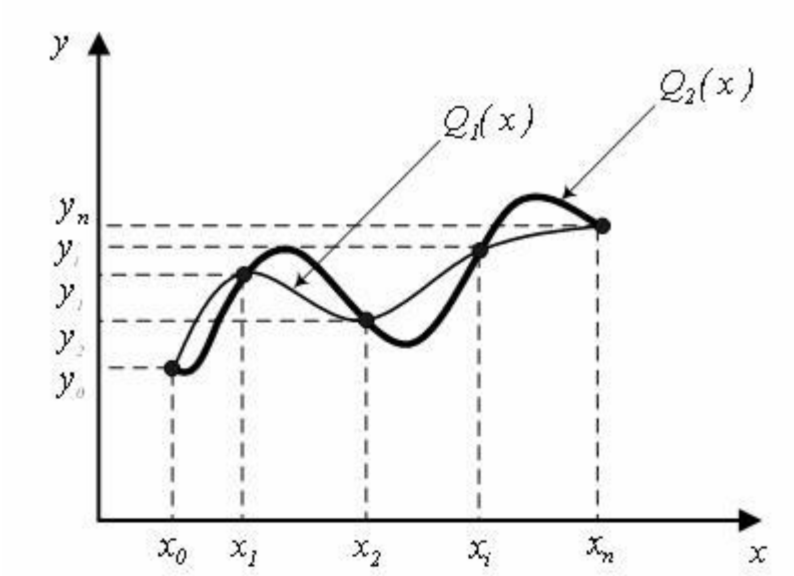


Рисунок 1.3 – Геометрична інтерпретація інтерполяції табличної функції

У випадку, коли Q(x) береться з класу степеневих функцій, інтерполяція називається параболічною. Цей спосіб наближення ґрунтується на тому, що на невеликих відрізках експериментальна функція f(x) може бути достатньо добре апроксимована параболою певного порядку. Якщо в якості інтерполяційної функції використовувати багаточлен виду:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{1.18}$$

то така інтерполяція називається степеневою.

Інколи доцільно використати інші види інтерполяції. Якщо функція, що досліджується, f(x) – періодична, то в якості інтерполяційної функції Q(x) вибирають тригонометричну, наприклад, виду:

$$Q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k coskx + b_k sinkx) \tag{1.19}$$

і така інтерполяція називається тригонометричною. В деяких в якості інтерполяційної функції Q(x) вибирають раціональні функції.

При інтерполюванні виникає ряд задач:

1. Вибір найбільш зручного способу побудови інтерполяційної функції для кожного конкретного випадку;
2. Оцінка похибки при заміні f(x) інтерполяційною функцією Q(x) на відрізку [a,b] , оскільки функції f(x) та Q(x) співпадають тільки у вузлах інтерполяції x_0, x_1, … , x_n ;
3. Оптимальний вибір вузлів інтерполяції для отримання мінімальної похибки.

Для задачі інтерполювання важливим є визначення того, як повинна вести себе інтерполяційна функція між заданими точками, так як ці точки можуть бути інтерпольовані множиною різноманітних функцій, і необхідно мати певний критерій вибору. Звичайно критерій формується в термінах гладкості та простоти. Більшість інтерполяційних функції генеруються лінійними комбінаціями найпростіших функцій. Лінійні комбінації одночленів $\{x^k\}$ формують степеневі поліноми, лінійні комбінації тригонометричних функцій {cosx, sinx} формують тригонометричні поліноми, використовуються також лінійні комбінації експонент $\{\exp(\beta_k\alpha)\}$. Найбільш важливим класом інтерполяційних функцій є множина алгебраїчних поліномів. Поліноми мають переваги з точки зору алгоритмізації, тому що їх значення легко обчисляти, додавати, перемножувати, інтегрувати чи диференціювати.

Важливою властивістю поліномів є те що якщо c – константа, а p(x)- поліном, то поліномами будуть і p(cx) і p(x+c).

Клас інтерполяційних функції обирають, використовуючи теорему Вейерштраса:

Якщо f(x) – неперервна на кінцевому інтервалі [a,b] функція, то для будь-якого ε > 0 існують поліном $p_n(x)$ ступеня n такий, що

$$max\left|f(x)-p_{n(x)}\right| < \varepsilon \qquad (1.20)\ .$$

2 МЕТОДИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ТА ОТРИМАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

На практиці в більшості випадків знайти точне рішення виниклого математичного завдання не вдається. Це відбувається головним чином не тому, що ми не вміємо цього робити, а оскільки шукане рішення зазвичай не виражається в звичайних для нас елементарних або інших відомих функціях. Тому важливе значення набули численні методи, особливо у зв'язку з зростанням ролі математичних методів у різних областях науки і техніки і з появою високопродуктивних ЕОМ.

Під численними методами розуміються методи рішення задач, що зводяться до арифметичних і деяких логічних дій над числами, тобто до тих дій, які виконує ЕОМ.

В даний час з'явився значна кількість різних програмних продуктів (MathCAD, MATLAB і т. Д.), За допомогою яких, задаючи лише вхідні дані, можна вирішити значну кількість задач.

Звісно, використання таких програмних продуктів значно скорочує час і ресурси для вирішення ряду важливих завдань. Однак, використання цих програм без ретельного аналізу методу, за допомогою якого вирішується завдання, не можна гарантувати, що задача вирішена вірно. Тому для більш повного розуміння того, як здійснюється розрахунок різного вигляду рівнянь та їх систем, необхідно теоретично вивчити методи їх вирішення та проробити їх на практиці.

2.1 Інтерполяційний багаточлен Лагранжа

Найбільш загальною формулою параболічного інтерполювання є інтерполяційна формула Лагранжа. Задача параболічного інтерполювання в цьому випадку формулюється наступним чином: на відрізку [a, b] у вузлах інтерполяції x_0, x_1, … , x_n задається функція f(x) своїми (n+1) значеннями : $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_n = f(x_n)$, необхідно побудувати багаточлен L(x) так, щоб у вузлах інтерполяції x_0, x_1, … , x_n його значення співпадали зі значеннями заданої функції, тобто $L(x_0) = y_0, L(x_1) = y_1, \dots , L(x_n) = y_n$. Слід відзначити, що в такій постановці задачі вузли інтерполяції x_0, x_1, … , x_n можуть бути довільно розташовані один від одного на відрізку [a, b], іншими словами, вузли інтерполяції не рівновіддалені, тобто

$$h = x_{i+1} - x_i \neq const(i = 0,1,\dots,n-1)$$

Величина h називається кроком інтерполяції.

Задача інтерполювання має розв‘язок, якщо степінь m багаточлена $L_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$, яким замінюється функція f(x), не вище порядку n($m \leq n$). Тоді задача інтерполювання зводиться до пошуку невідомих постійних коефіцієнтів багаточлена a_i (i=0,1,…,m) з системи рівнянь, яка будується наступним чином. З початкових умов відомо, що функція $L_n(x)$ в вузлах x_0, x_1, … , x_n приймає значення $L(x_0) = y_0, L(x_1) = y_1, \dots, L(x_n) = y_n$. Тоді в вузлі x_0 інтерполяційний багаточлен $L_n(x)$ має вигляд $L_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \dots + a_nx_0^n$ у вузлі інтерполяції x_1 - $L_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \dots + a_nx_1^n$ і так далі. Нарешті, в вузлі x_n інтерполяційний багаточлен $L_n(x)$ буде виглядати:

$$L_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \dots + a_nx_n^m \tag{2.1}$$

Запишемо це у вигляді системи (n+1) рівнянь з m+1 невідомими $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \dots + a_mx_0^m = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \dots + a_mx_1^m = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + \dots + a_mx_2^m = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \dots + a_mx_n^m = y_n \end{cases}$$

де x_i і y_i (i=0,1,…,n) табличні значення аргументу і функції, що досліджується. Невідомі коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n$ знаходяться по формулам Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} a_n, \dots, = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (2.3)$$

де Δ - визначник системи .

Якщо Δ≠0 (тобто коли x_0, x_1, … , x_n різні), то система має єдиний розв'язок. Якщо знайти коефіцієнти $a_{0}, a_1, \dots, a_n$, можна уявити інтерполяційний багаточлен у вигляді:

$$L_n(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta} + \frac{\Delta_1}{\Delta} x + \frac{\Delta_2}{\Delta} x + \dots + \frac{\Delta_n^2}{\Delta} x^n \qquad (2.4)$$

Перепишемо багаточлен в іншій формі:

$$L_n(x) = y_0 Q_0(x) + y_1 Q_1(x) + \dots + y_n Q_n(x) \qquad (2.5)$$

Легко перевірити, що функція Q(x) повинна задовольняти умовам:

$$Q_i(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad (2.6)$$

$$Q_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} \qquad (2.7)$$

В точках $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ функція $Q_i(x)$ обертається в 0, а в точці x_i дорівнює 1.

Остаточно отримаємо вираз :

$$L_m(x) = y_0 \frac{(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \dots (x_j - x_n)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \cdots$$
$$+ y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \quad (2.8)$$

Цей багаточлен називається інтерполяційним багаточленом Лагранжа. В спрощеному вигляді його можна записати так:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_j \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} \quad (2.9)$$

Даний метод легко алгоритмізується і може використовуватися для розробки програм інтерполяції. Схема алгоритму метода представлена на рисунку 2.1.

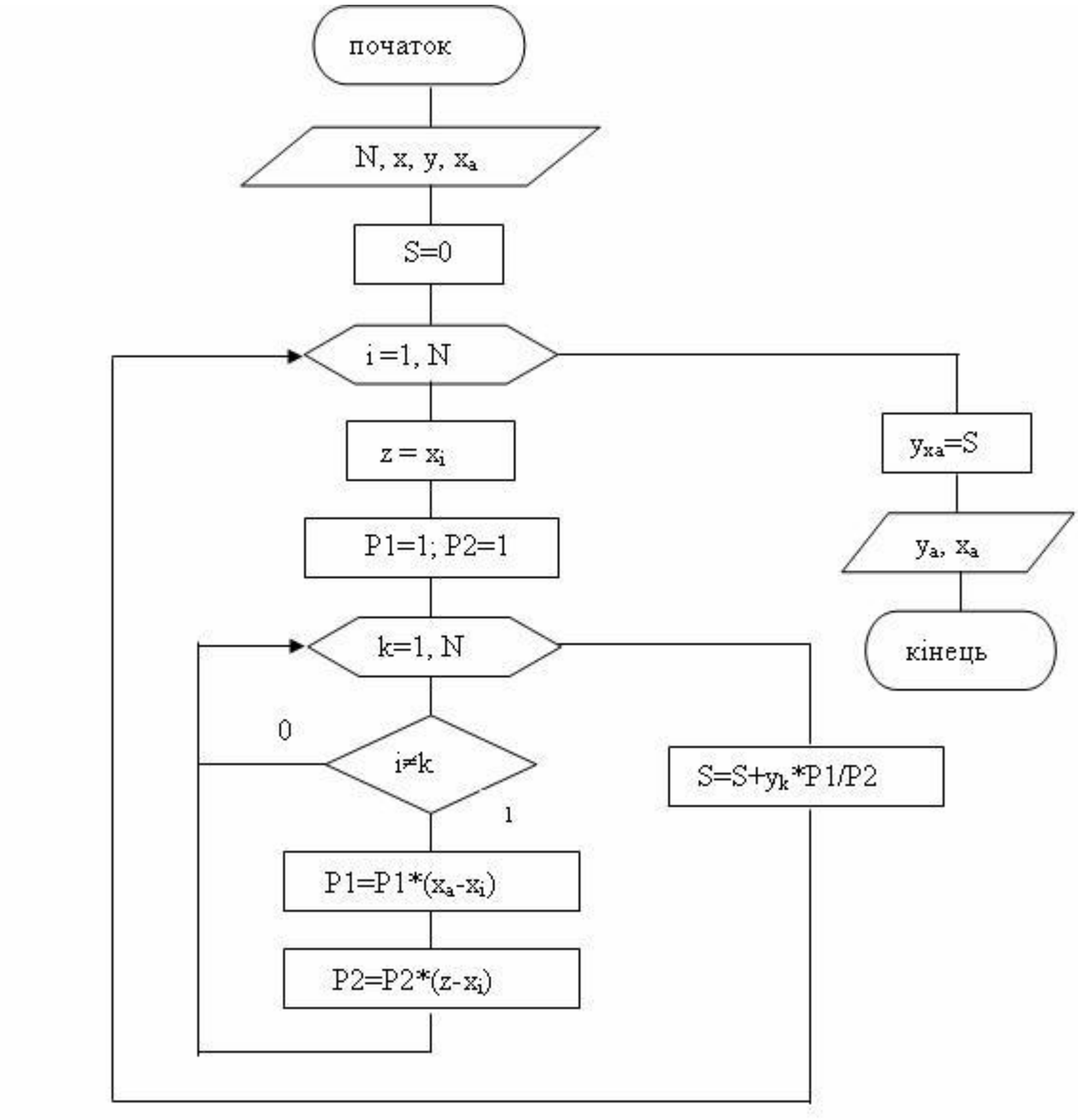


Рисунок 2.1 – Схема алгоритму метода Лагранжа

Висновки:

1. Таким чином за допомогою багаточлена Лагранжа були отримані коефіцієнти інтерполяційної функції .

2. Використовуючи отриманий багаточлен можливо знайти будь-яке значення функції *y* для заданого *x*.

3. Використовуючи інтерполяційний багаточлен можливо отримати значення функції *y* за межами спостережень. Така задача називається екстраполяція (прогнозування функції).

Для оцінки похибки інтерполяційного багаточлена Лагранжа використовують формулу:

$$R_n(x) = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \qquad (2.10)$$

причому $M_{n+1} = max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$, при $x \in [a, b]$

2.2 Перша інтерполяційна формула Ньютона для рівновіддалених вузлів інтерполяції

Якщо функція, що досліджується, задана значеннями $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_n = f(x_n)$ в рівновіддалених вузлах інтерполяції, тобто: $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots, x_n = x_0 + nh$,то для побудови її аналітичної залежності зручно використовувати першу інтерполяційну формулу Ньютона.

Для виводу інтерполяційних формул для рівновіддалених вузлів інтерполяції вводиться поняття кінцевої різниці.

Поставимо наступну задачу: для функції y=f(x), яка задана таблицею значень $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_n = f(x_n)$ причому *x* змінюється з однаковим кроком h, тобто $x_j = x_{j-1} + h$, побудувати кінцеві різниці.

Кінцевою різницею першого порядку Δy_j називається різність між значеннями функції в сусідніх вузлах інтерполяції:

$$\begin{gathered}\Delta y_0 = y_1 - y_0 \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 \\ \Delta y_2 = y_3 - y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta y_n = y_n - y_{n-1}\end{gathered} \qquad (2.11)$$

В загальному вигляді кінцеву різницю першого порядку Δy_j можна записати як $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$.

Кінцева різниця другого порядку $\Delta^2 y_j$ складається з кінцевих різниць першого порядку:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ \Delta^2 y_2 &= \Delta y_3 - \Delta y_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta^2 y_n &= \Delta y_{n-1} - \Delta y_n \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Кінцева різниця n-го порядку $\Delta^n y_j$ складається з кінцевих різниць (n-1)-го порядку:

$$\begin{aligned} \Delta^n y_0 &= \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0 \\ \Delta^n y_1 &= \Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1 \\ \Delta^n y_2 &= \Delta^{n-1} y_3 - \Delta^{n-1} y_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta^n y_n &= \Delta^{n-1} y_{n-1} - \Delta^{n-1} y_n \end{aligned} \qquad (2.13)$$

або в технічної літературі використовують наступну формулу кінцевої різниці n-го порядку:

$$\Delta^k y = \Delta(\Delta^{n-1} y) \qquad (2.14)$$

Нехай необхідно побудувати інтерполяційний багаточлен $P_n(x)$ степеню m такий, що $P_m(x_0) = y_0, P_m(x_1) = y_1, \dots, P_m(x_n) = y_n$

Будемо шукати багаточлен виду :

$$\begin{aligned} P_m(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ + a_m(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \qquad (2.15)$$

В цьому виразі невідомі коефіцієнти a_0, a_1, … , a_m . Для того щоб знайти a_0, покладемо $x=x_0$. Тоді при підстановці $x=x_0$ в вираз всі складові, окрім першої, обернуться в нуль, тобто $P_n(x_0) = a_0$, а значення функції в точці x_0 відомі з умови задачі: $P_n(x_0) = y_0$.Отже $a_0 = y_0$.

Щоб знайти коефіцієнт a_1 складемо першу кінцеву різницю для багаточлена $P_m(x)$ в точці x:

$$\Delta P_m(x) = P_m(x+h) - P_m(x) \tag{2.16}$$

Зробивши всі підстановки, отримаємо:

$$\begin{aligned}\Delta P_m(x) = a_0 &+ a_1(x-x_0+h) + a_2(x-x_0+h)(x-x_1+h) \\ &+ a_3(x-x_0+h)(x-x_1+h)(x-x_2+h) + \cdots \\ &+ a_m(x-x_0+h)(x-x_1+h)\dots(x-x_{n-1}+h) - a_0 + a_1(x-x_0) \\ &+ a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots \\ &+ a_m(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \\ &= a_1(x-x_0+h) - (x-x_0) + a_2(x-x_0+h)(x-x_1+h) \\ &- (x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0+h)(x-x_1+h)(x-x_2+h) \\ &- (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots \\ &+ a_m(x-x_0+h)(x-x_1+h)\dots(x-x_{n-1}+h) \\ &- (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \\ &= ha_1 + 2ha_2(x-x_0) - 3ha_3(x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\ &+ nha_m(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2})\end{aligned} \tag{2.17}$$

Обчислимо першу кінцеву різницю багаточлена в точці x_0 . Тут також всі члени, окрім першого, обернуться в нуль, і, отже, $\Delta P_m(x_0) = a_1 h$, але

$$\Delta P_m(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0 = \Delta y_0 \ , \tag{2.18}$$

звідки $\Delta y_0 = a_1 h$ і $a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$.

Щоб визначити коефіцієнт a_2 складаємо кінцеву різницю другого порядку:

$$\Delta^2 P_m(x) = \Delta P_m(x+h) - \Delta P_m(x) \tag{2.19}$$

Після перетворень отримаємо:

$$\Delta^2 P_m(x) = 2!\,h^2 a_2 + 2\cdot 3\cdot h^2 a_3(x-x_0) + \cdots$$
$$+(n-1)nh^2 a_m(x-x_0)\ldots(x-x_{n-3}) \tag{2.20}$$

Вважаємо $x=x_0$; тоді всі члени, окрім першого, знов обернуться в нуль і $\Delta^2 P_m(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2!\,h^2 a_2$. Звідси:

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2} \tag{2.21}$$

Обчислюючи кінцеві різниці більш високих порядків і вважаючи $x=x_0$, прийдемо до загальної формули для отримання коефіцієнтів:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k}\,, (ki = 0,1,2,\ldots,m), \tag{2.22}$$

де будемо вважати, що $0!=1$ та $\Delta^0 y=y$. Підставивши знайденні значення коефіцієнтів a_k в вираз , отримаємо першу інтерполяційну формулу Ньютона.

$$P_m(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots$$
$$+\frac{\Delta^m y_0}{m!\,h^m}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \tag{2.23}$$

На практиці часто використовують формулу Ньютона в іншому вигляді. Для цього введемо заміну $q=(x-x_0)/h$ де h- крок інтерполяції, а q - число кроків. Тоді перша інтерполяційна формула Ньютона прийме наступний вигляд:

$$P_m(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots$$
$$+ \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{h!}\Delta^m y_0 \qquad (2.24)$$

Формулу зручно використати для інтерполювання на початку відрізку інтерполяції [a, b] , де q мале за абсолютною величиною.

Якщо за число вузлів інтерполяції прийняти n=1, то отримаємо формулу лінійного інтерполювання:

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0 \qquad (2.25)$$

При n=2 отримаємо формулу параболічного, або квадратичного інтерполювання:

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0 \qquad (2.26)$$

На практиці часто буває необхідно зменшити крок інтерполяції якої-небудь таблиці з рівновіддаленими аргументами. В таблиці можна вважати, що кількість вузлів інтерполяції необмежена. Тоді вибирають n так, щоб кінцева різниця $\Delta^n y_i$ була постійна з заданим ступенем точності. За початкове значення x_0 можна вибирати будь-яке значення аргументу [4].

Схема алгоритму інтерполяції табличної функції багаточленом Ньютона представлена на рисунку 2.2.

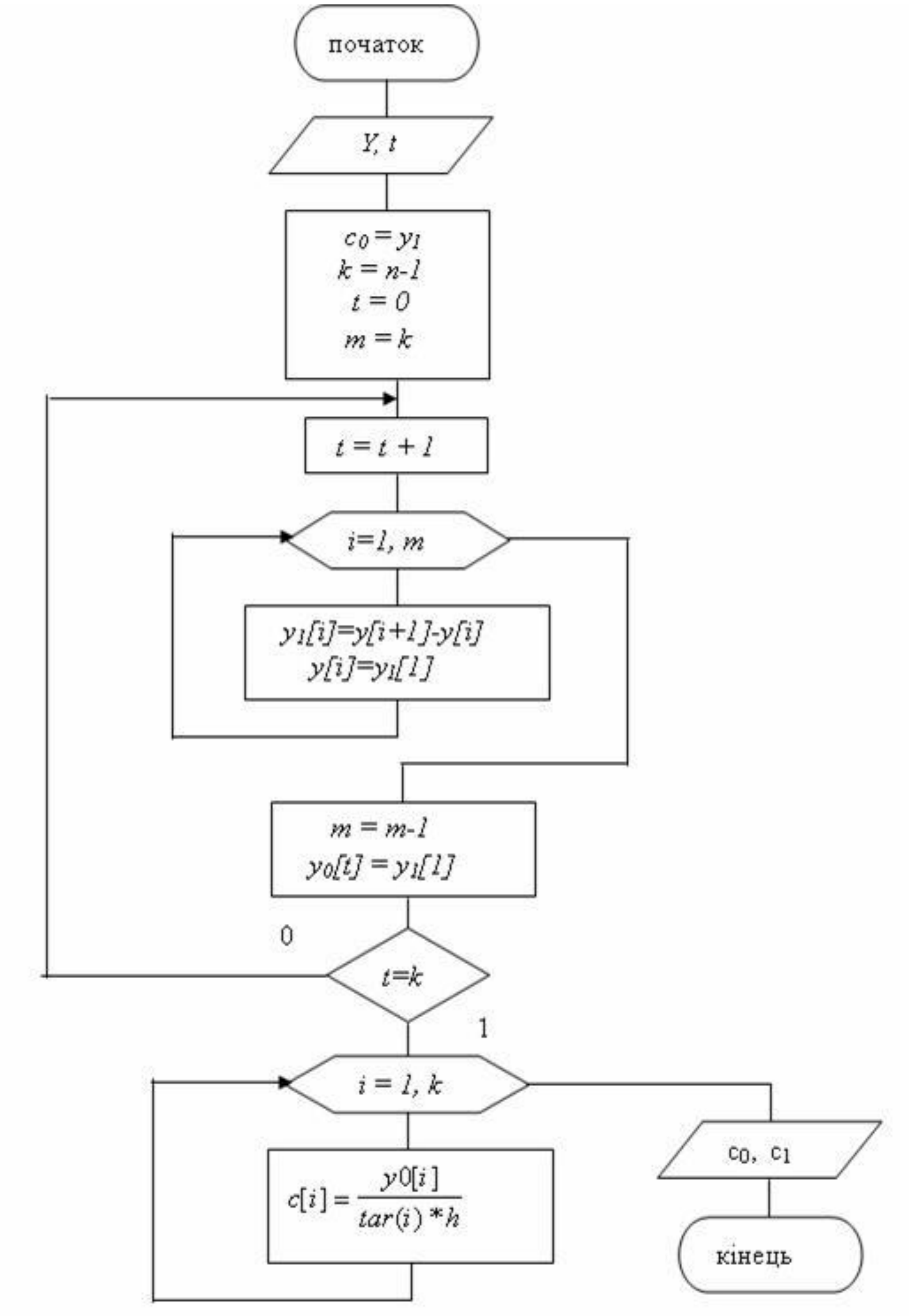


Рисунок 2.2 – Схема алгоритму інтерполяції табличної функції багаточленом Ньютона

2.3 Сплайн-інтерполяція

Використання однієї інтерполяційної формули для великого числа вузлів, як у випадку інтерполяційних формул Ньютона чи Лагранжа являється недоцільним. Такий інтерполяційний многочлен сильно проявляє свої коливальні властивості, і його значення між вузлами можуть сильно відрізнятися від значень інтерпольованої функції. Однією з можливостей обійти такий недолік є застосування сплайн-інтерполяції. Ідея сплайн-інтерполяції полягає в побудові поліномів між парами сусідніх вузлів інтерполяції, причому для кожної пари вузлів будується свій поліном.

Поняття сплайна

Процес побудови послідовності інтерполяційних поліномів по послідовності сіток, що згущається, на [a, b] називається інтерполяційним процесом. Теорема 1 (Фабера). Для будь-якої послідовності сіток, що згущається, на [a, b] існує безперервна функція, для якої інтерполяційний процес не сходиться рівномірно.

Теорема 2. Для будь-який безперервної на відрізку [a,b] функції f(0) можна вибрати послідовність сіток, що згущається, на [a,b] таку, що інтерполяційний процес, побудований по цій сітці, рівномірно на [a, b] сходиться до функції f(0).

Слово ,,сплайн'' (англ. spline) означає гнучку лінійку, використовувану для проведення гладких кривих через задані крапки площини. Нехай обрані цілі числа $m \geq 0$ і $l \geq -1$ та на інтервалі [a, b] задано сітку. Сплайном степені m гладкості l називається функція $S_{m,l}(x)$, задовольняючим двом умовам:

- на кожнім з інтервалів $[x_i,\ x_{i+1}]$ вона є алгебраїчним поліномом ступеня не вище m, тобто:

$$S_{m,l}(f,x) = P_{im}(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \cdots + a_{im}x^m\ ; i = 1, \dots, n \qquad (2.27)$$

де n – кількість розбивок;

- на всьому інтервалі [a,b] вона належить класові гладкості C^l [a,b] , тобто її похідні безперервні в крапках x_i до порядку l-1.

$$P_{i,m}^{(k)}(x_i) = P_{i+1,m}^{(k)}(x_i), \tag{2.28}$$

де x_i - заданий вузел, i=1,…, n-1; k=0,…, m-1.

Звичайно беруть l=m. Якщо будувати сплайн m-го порядку, то невідомих (m+1)n. Можна будувати сплайны будь-якого порядку. Побудуємо сплайн першого порядку. Він називається лінійним .

$$S_{1,l}(f,x) = P_{il}(x) = a_{i0} + a_{il}x \tag{2.29}$$

Усього n відрізків, на кожному відрізку 2 невідомих, значить усього 2n невідомих. Можемо вимагати безперервність, тобто:

$$P_{i,l}(x_i) = P_{i+1,l}(x_i), i = 1, \dots, n-1$$
$$P_{il}\left(x_{i(i-l)}\right) = y_{i(i-l)}, i = 1, \dots n$$

Знайдемо значення коефіцієнтів:

$$\left.\begin{array}{r} a_{i0} + a_{il}x_{i-1} = y_{i-1} \\ a_{i0} + a_{il}x_i = y_i \end{array}\right\}$$

Якщо вирішимо цю систему, то одержимо наступне:

$$a_{il} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}; \;\; a_{i0} = y_{i-1} - a_{il} \cdot x_{i-1}$$

До одержання лінійного сплайна можна застосувати варіаційний підхід. Маємо безліч S_1 безперервних, кусочно-дифференцируемых функцій S(x), задовольняючим умовам:

$$S(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$$

$$l_1(s) = \int_0^1 [S'(x)]^2 dx \ < \infty$$

Будуємо функціонал .

Задача: знайти функцію $S_1(x) \in S_1$, реалізуючу inf $l_1(s)$, $s \in S_1$. Рівняння Эйлера в даному випадку має вигляд:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dS'}\right) - \frac{dF}{DS} = 0\ , \tag{2.30}$$

де F – це наша функція, тобто F(x,S,S') ,

$$\frac{dF}{dS'} = 2S'(x), \frac{d}{dx}\left[\frac{dF}{dS'}\right] = \frac{d}{dx}[2S'(x)] = 2S''(x)$$

Підставляючи в рівняння Эйлера, приходимо до рівняння $S''(x) = 0$. Функція, мінімізуюча функціонал і задовільняюча це рівняння - це лінійна функція виду:

$$S_1(x) = ax + b$$

$$S_1(x) = S_\Delta^1(f, x) \tag{2.31}$$

Кубічний сплайн

Інтерполяція багаточленом Лагранжа або Ньютона на відрізку [a,b] с використанням великого числа вузлів інтерполяції часто приводить до поганого наближення, що порозумівається сильним нагромадженням погрішностей у процесі обчислень. Крім того, через расходимости процес інтерполяції, збільшення числа вузлів не зобов'язано приводити до підвищення точності. Для того, щоб уникнути великих погрішностей, весь відрізок [a,b] розбивають на часткові відрізки і на кожнім з часткових відрізків приблизно заміняють функцію f(x) багаточленом невисокого ступеня (так називана кусково-поліноміальна інтерполяція_). Одним зі способів інтерполяції на усьому відрізку є інтерполяція за допомогою сплайнов. Перевага сплайнов перед звичайною інтерполяцією є, по-перше, їхня збіжність, і, по-друге, стійкість процесу обчислень.

Розглянемо приватний, але розповсюджений в обчислювальній практиці випадок, коли сплайн визначається за допомогою багаточленів третього ступеня (кубічний сплайн).

Нехай на [a,b] задано безперервну функцію f(x). Уведемо вузли (сітку):

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

і позначимо $f_i = f(x_i),\ i = \overline{0,n}$

Інтерполяційним кубічним сплайном , відповідної даної функції f(x) і даним вузлам, називається функція S(x), що задовольняє наступним умовам:

а) на кожному сегменті $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$ функція S(x) є багаточленом третього ступеня;

б) функція S(x), а так само її перша і друга похідні безперервні на [a,b];

в) $S(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,n}$

Остання умова називається умовою інтерполяції. Знайдемо кубічний сплайн.

На кожнім з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$ будемо шукати функцію $s(x)=s_i(x)$ у виді багаточлена третього ступеня :

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \qquad (2.32)$$

$$x_{i-1} \le x \le x_i\ ,\ i = \overline{1,n}$$

де a_i, b_i, c_i, d_i - коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Чисельно доведено що:

$$a_0 = f(x_0), a_i = f(x_i)\ , i = \overline{1, n} \qquad (2.33)$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \qquad (2.34)$$

$$i = \overline{1, n}\ , \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Для визначення c_i необхідно вирішити систему виду:

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \qquad (2.35)$$

$$i = \overline{1, n-1}\ , c_0 = c_n = 0$$

Похибка наближення кубічними сплайнами. Нехай функція *f* має на відрізку [a,b] безперервну похідну четвертого порядку

$$M_4 = \max_{[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right| \qquad (2.36)$$

Тоді для інтерполяційного кубічного сплайна справедлива оцінка похибки:

$$\max_{[a,b]}|f(x) - S_3(x)| \le CM_4 h_{max}^4 \qquad (2.37)$$

2.4 Проведення натурного експерименту

Для наочності можливостей методів інтерполяції функцій потрібно отримати експериментальні дані, на підставі яких буде реалізована досліджувана функціональна залежність. Метою даного експерименту є пошук параметрів струму та напруги для опису залежності струму від напруги на прикладі вольт-амперної характеристики діода КД411АМ.

Суть даного процесу полягає в подачі напруги в межах робочої напруги діод та індикації сили струму, що протікає крізь нього. Як джерело напруги і індикатора сили струму був обраний блок живлення типу DC POWER supply PS-1502 DD. Оскільки функціональні можливості даного пристрою дозволяють не вдаватися до допоміжних індикаторів і не ускладнювати схему підключення додатковими елементами. Технічні характеристики блоку живлення:

- вихідна напруга 0..15 вольт, виставляється в ряд фіксованих значень, або за допомогою плавного регулювання (поточна напруга відображається 3-розрядних цифровим індикатором).

- вихідний струм до 2 ампер, регульований струм спрацьовування тригерного захисту понад 2 А (поточний струм навантаження відображається 3-розрядних цифровим індикатором).

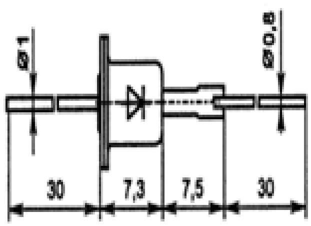
-стабільність напруги 0.01%.

- напруга пульсації при струмі 2 А не більше 0.5 мВ.

Принципова схема блоку живлення зображена на рисунку 2.3 .

Розглянемо характеристики діода КД411АМ і аналогічних йому моделей, представлених в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1-Характеристики діода

Найменування	$U_{зв}$, В	$I_{пр}$ max, А	$I_{зв}$ max, мкА	F_d max, кГц	Тип корпусу
КД411АМ	700	2	300	30	
КД411БМ	750	2	300	30	
КД411ВМ	600	2	300	30	
КД411ГМ	500	2	300	30	
КД411ЕМ	300	2	10	30	
КД411НМ	800	2	1	30	

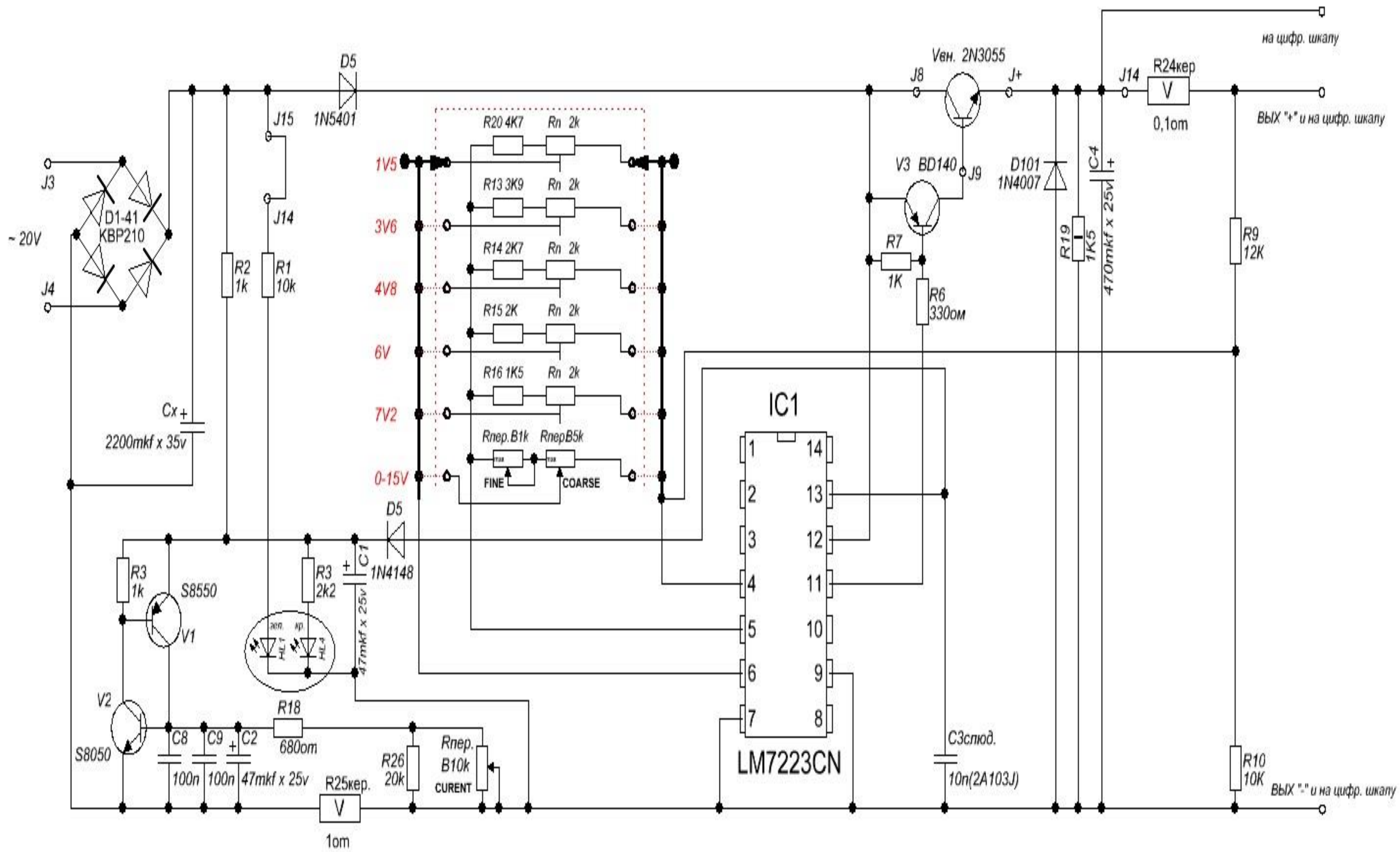


Рисунок 2.3-Принципова схема блоку

Зворотня максимальна напруга $U_{зв}$ - це напруга діода, яку він витримує при підключенні у зворотному напрямку, при цьому крізь нього буде протікати струм $I_{зв}$ - сила струму при зворотному підключенні діода. При перевищенні зворотної напруги у діоді виникає так званий лавинний пробій, в результаті цього різко зростає струм, що може привести до повного теплового руйнування діода. У нашому досліджуваному діоді ця напруга становить 700 Вольт. Максимальний прямий струм $I_{пр}$ - це максимальний струм, який може протікати крізь діод. У нашому випадку це 2 Ампера. Схематично загальна ВАХ діода представлена на рис 2.4.

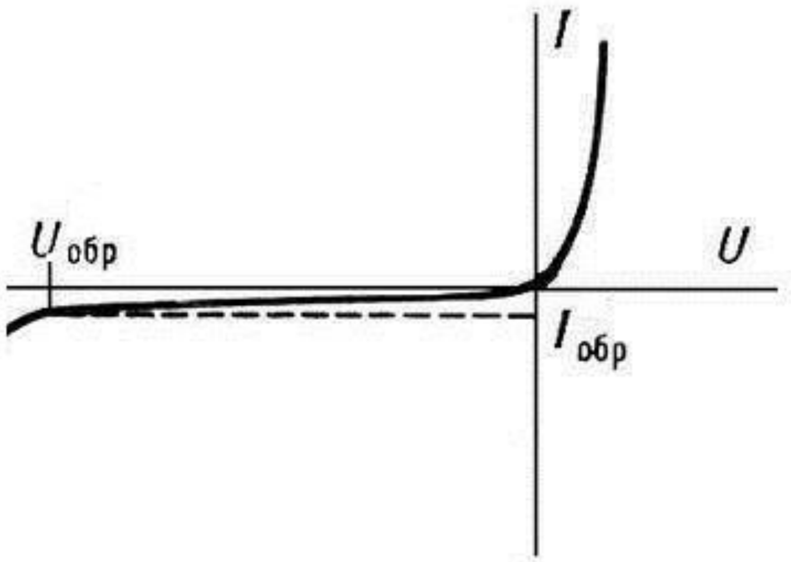


Рисунок 2.4- Вольт-амперна характеристика діода у загальному випадку

Для отримання значень необхідно підключити діод до блоку живлення DC POWER supply PS-1502 DD наступним чином: плюс блоку живлення підключаємо до анода діода, а мінус до катода як показано на рис.2.5 Збільшуючи напругу ручкою регулятора, знімаємо покази сили струму.

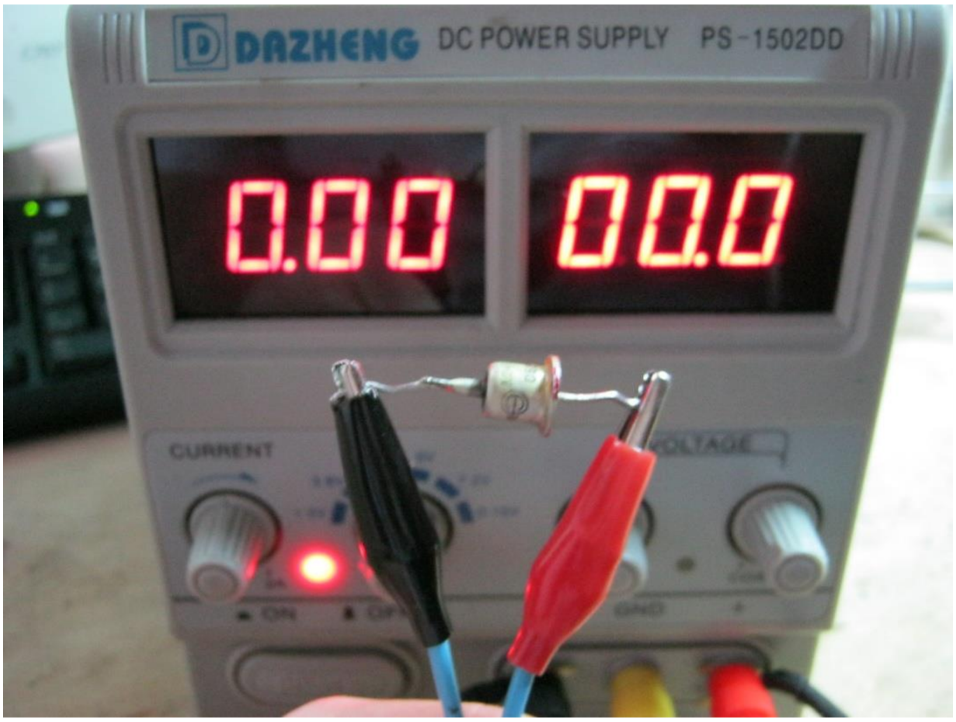


Рисунок 2.5-Підключення діода

Результати натурного експерименту

Для набору експериментально отриманих даних (див. Таблиця 2.2) необхідно визначити функціональну залежність струму від напруги за допомогою пакету LabVIEW.

Таблиця 2.2. Експериментальні значення залежності струму від напруги.

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
U, В	0	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1
I, А	0	0	0,01	0,03	0,06	0,13	0,37

3 ОБРОБКА РЕЗУТЬТАТІВ СУМІСНИХ ВИМІРЮВАНЬ МЕТОДАМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ У ПРОГРАМНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Функціональну залежність необхідно визначити за допомогою таких методів:

1. Побудова функції I (U), використовуючи інтерполяційний многочлен Лагранжа;

2. Побудова функції I (U), використовуючи інтерполяційний многочлен Ньютона;

3. Побудова функції I (U), використовуючи кубічні сплайни.

3.1 Програмна реалізація методів інтерполяції у середовищі LabVIEW

Інтерполяційний поліном Лагранжа відносять до найбільш простих інтерполяційних поліномів.

Нехай задані n+1 точок (x_0,y_0), (x_1,y_1), …, (x_n,y_n) на координатній площині, за умови $x_i < x_{i+1}$, i=0,n. Інтерполяційний поліном Лагранжа n-го ступеня для даної множини точок має вигляд:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \right)_i \cdot y_i \qquad (3.1)$$

Візьмемо для прикладу n=1. Тоді після підстановки в формулу знаходимо:

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot y_1 \qquad (3.2)$$

Отримане рівняння є рівнянням відрізка прямої лінії, яка з'єднує точки (x_0,y_0) и (x_1,y_1).

Для реалізації даної задачі у середовищі графічного програмування LabVIEW існує ряд вбудованих функцій ,що значною мірою скорочує процес побудови алгоритму та обробки даних.

Блок-діаграма такого алгоритма представлена на рис.3.1

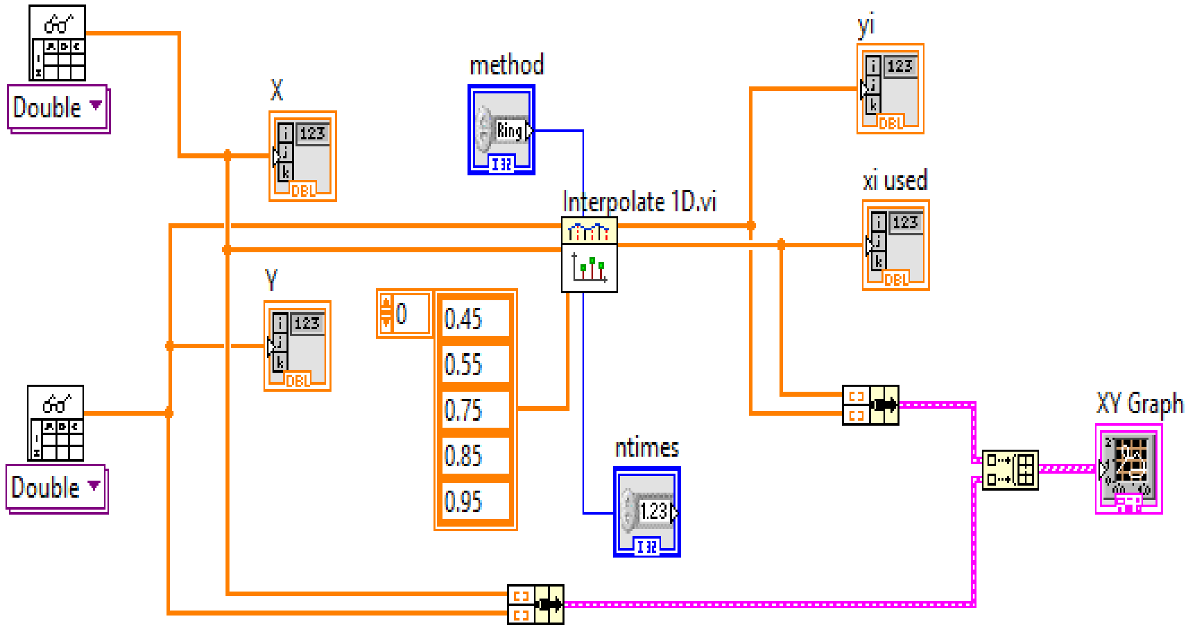


Рисунок 3.1- Блок-діаграма алгоритма інтерполювання

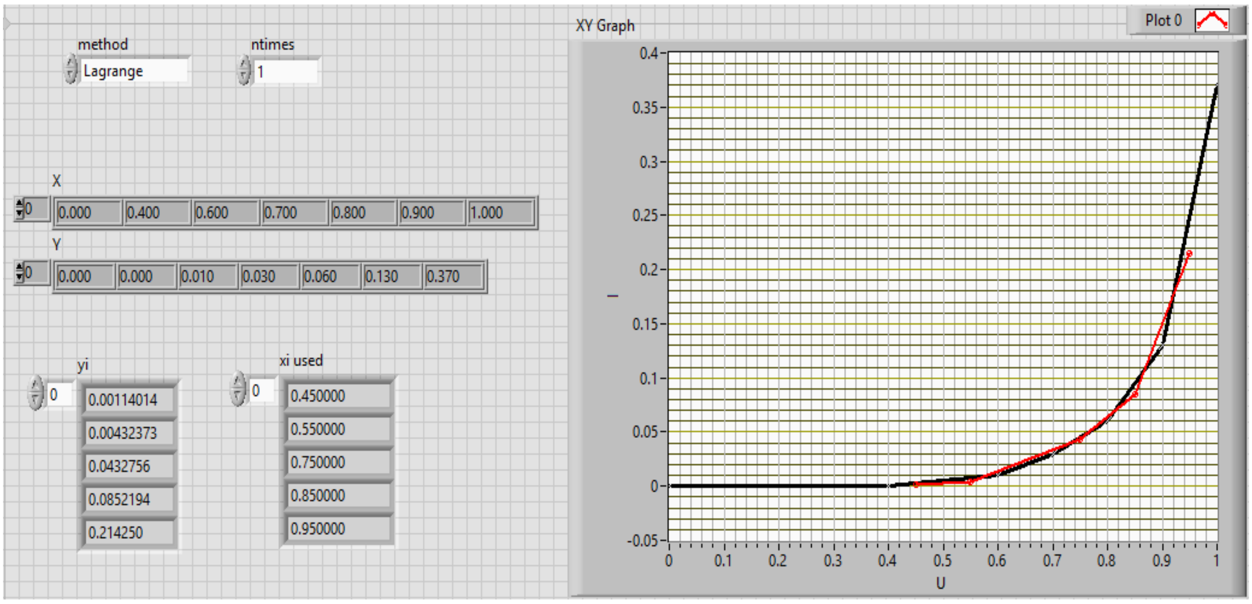


Рисунок 3.2- Результат роботи алгоритма

Окрім інтерполювання функції поліномом Лагранжа , вбудовані функції LabVIEW дозволяють також використовувати наступні методи :

-лінійна інтерполяція (linear);

-інтерполяція методом найближчого сусіда (nearest);

-інтерполяція кубічним ермітовим сплайном (cubic Hermite);

-інтерполяція сплайнами (spline).

Результат інтерполювання функції вищезазначеними методами представлена на рисунках 3.3 – 3.6

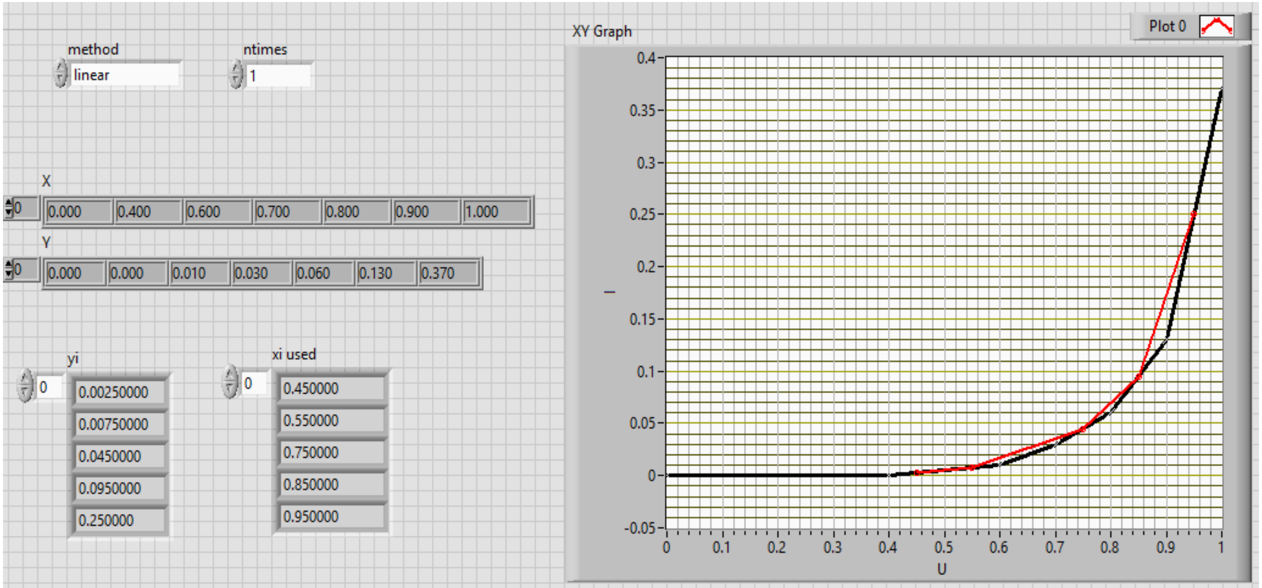


Рисунок 3.3- Лінійна інтерполяція

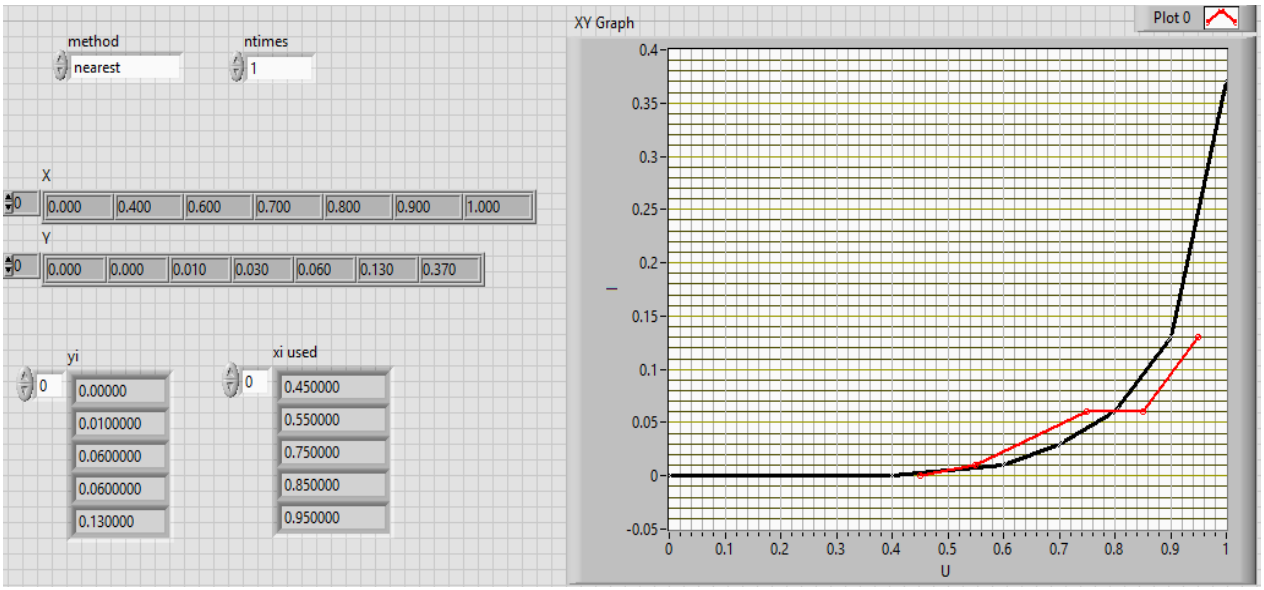


Рисунок 3.4- Інтерполяція методом найближчого сусіда

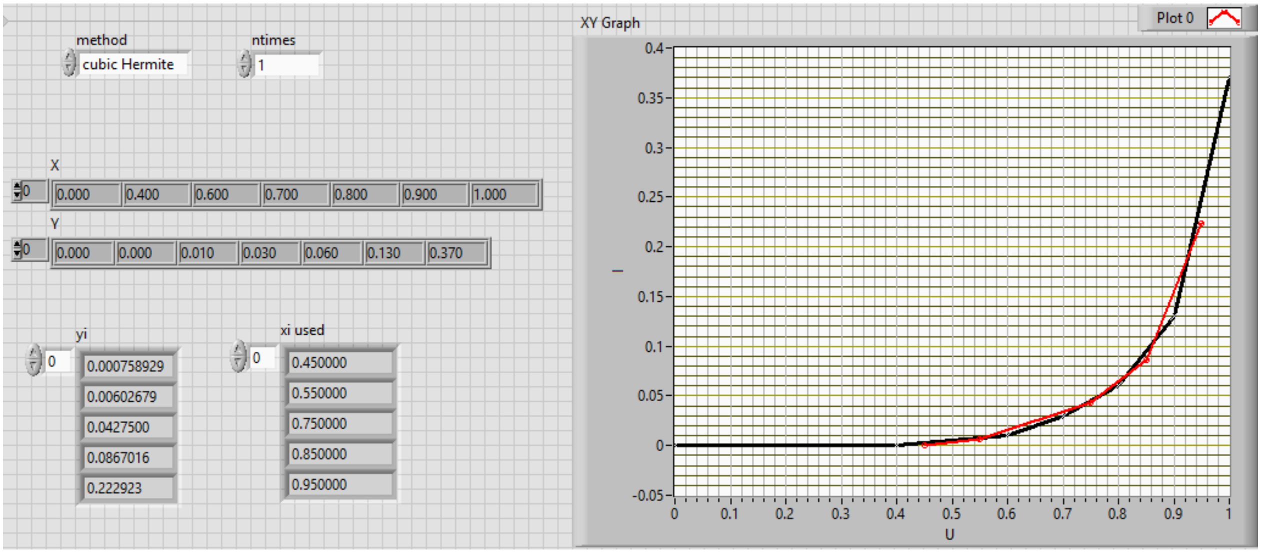


Рисунок 3.5- Інтерполяція кубічним ермітовим сплайном

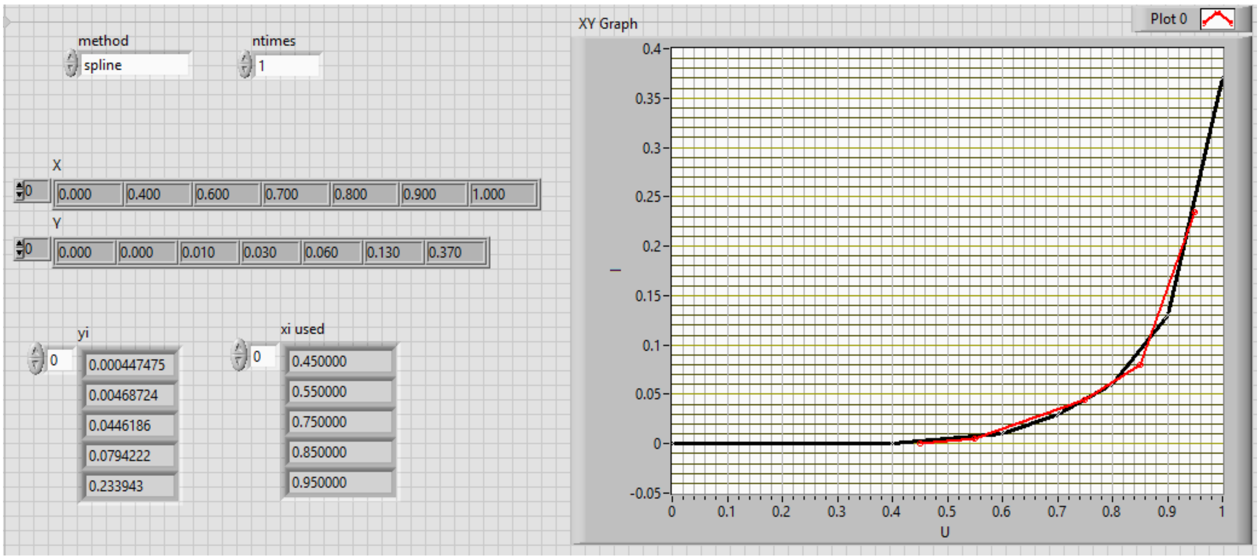


Рисунок 3.6- Інтерполяція сплайнами

Поліном Лагранжа – це не єдиний багаточлен, який відповідає задачі інтерполювання. У дійсності існує нескінченно багато відповідних багаточленів, але багаточлен Лагранжа –це єдиний багаточлен ступені n, що є рішенням задачі. Разом із тим інтерполяційний метод Лагранжа має ряд істотних недоліків:

- оскільки ступінь багаточлена Лагранжа визначається кількістю вузлів (мінус 1), то будь-яка спроба підвищити точність апроксимації шляхом збільшення кількості вузлів тягне за собою збільшення ступеня полінома;

- формула для розрахунку достатньо громіздка. Кожен доданок формули є багаточленом n-го ступеня;

-якщо ступінь полінома вище 5, то на кривій з'являється «хвилястість», яка отримала назву ефекта Рунге – Мерей. Можливо поліпшити ситуацію шляхом підбору розташування вузлів в залежності від конкретної функції в інтерактивному режимі, але така процедура достатньо незручна .

Один із шляхів зменшення хвилястості полягає у розбитті інтервала інтерполювання на декілька підінтервалів, для кожного із яких формують багаточлени Лагранжа , але вже більш низьких ступенів.

У подальшому багаточлени Лагранжа «склеюють», проте об'єднана апроксимуюча функція може бути недиференційованою на кінцях підінтервалів.

При рівномірній дискретизації (Δx=const) зручно користуватися інтерполяційною формулою Ньютона. Щоб записати формулу Ньютона введемо поняття о так званих різницях функції.

Нехай задані значення аргумента a, a+h, a+2h, a+3h, … та відповідні значення функції. Випишемо значення аргумента та функції двома колонками. Після цього кожне число другої колонки ,починаючи з першого, віднімемо із наступного числа. Отримаємо перші різниці функції і першу з них позначимо через Δf(a). Знайдені різниці запишемо у третю колонку. Аналогічно з першими різницями складаються другі. Першу із других різниць позначимо символом $\Delta^2 f(a)$. Таким же чином складаються треті різниці та інші.

$$f(a) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{3!\,h^3}\Delta^3 f(a) + \cdots \quad (3.3)$$

Зазначимо ,що поліном Ньютона третього порядку у порівнянні із поліномом Ньютона другого порядку дозволяє підвищити точність відновлення лише у 1,5 рази.

На рисунках 3.7, 3.8 представлена реалізація інтерполяції функції поліномом Ньютона у середовищі графічного програмування LabVIEW.

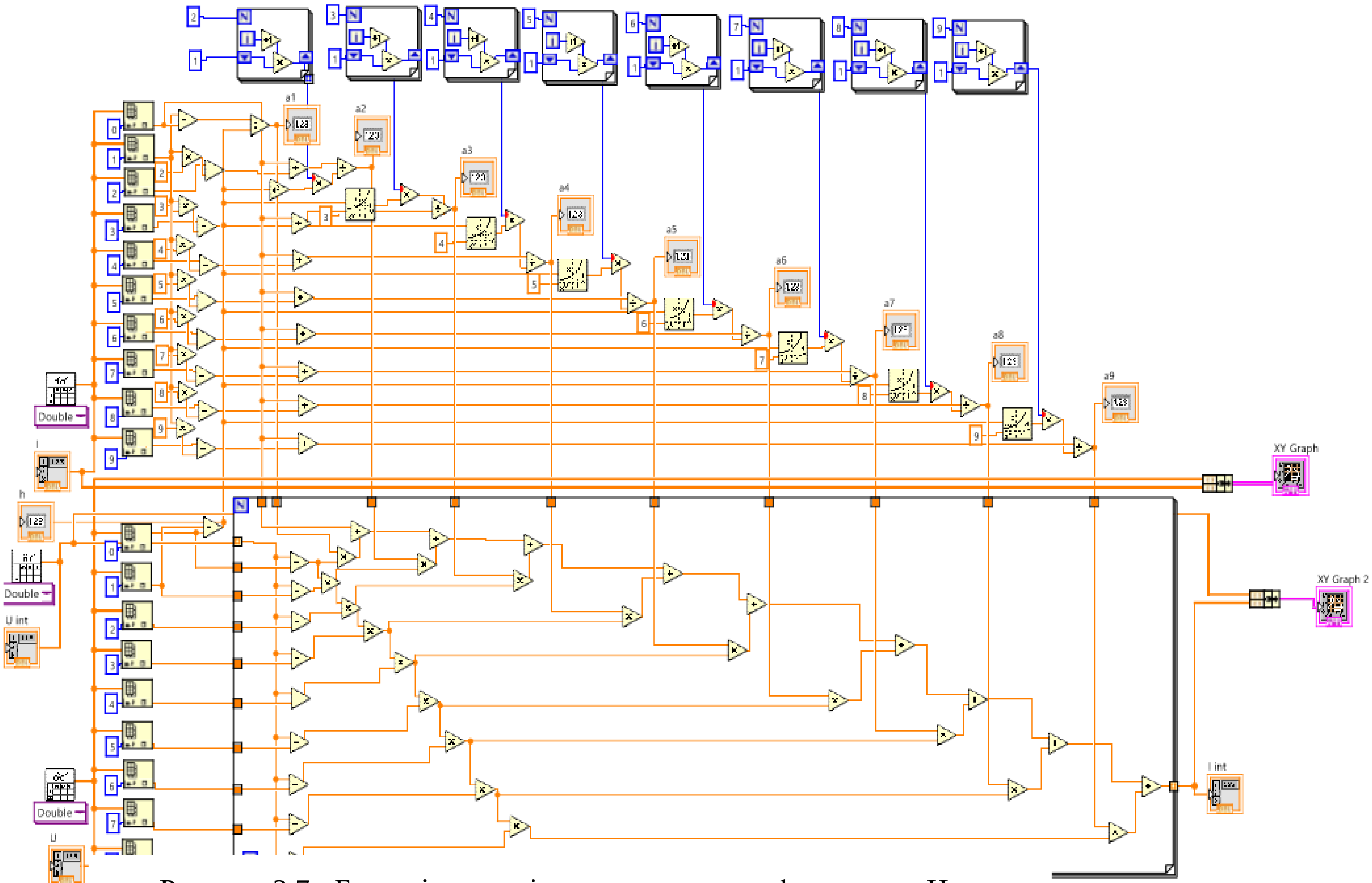


Рисунок 3.7- Блок-діаграма інтерполювання за формулами Ньютона

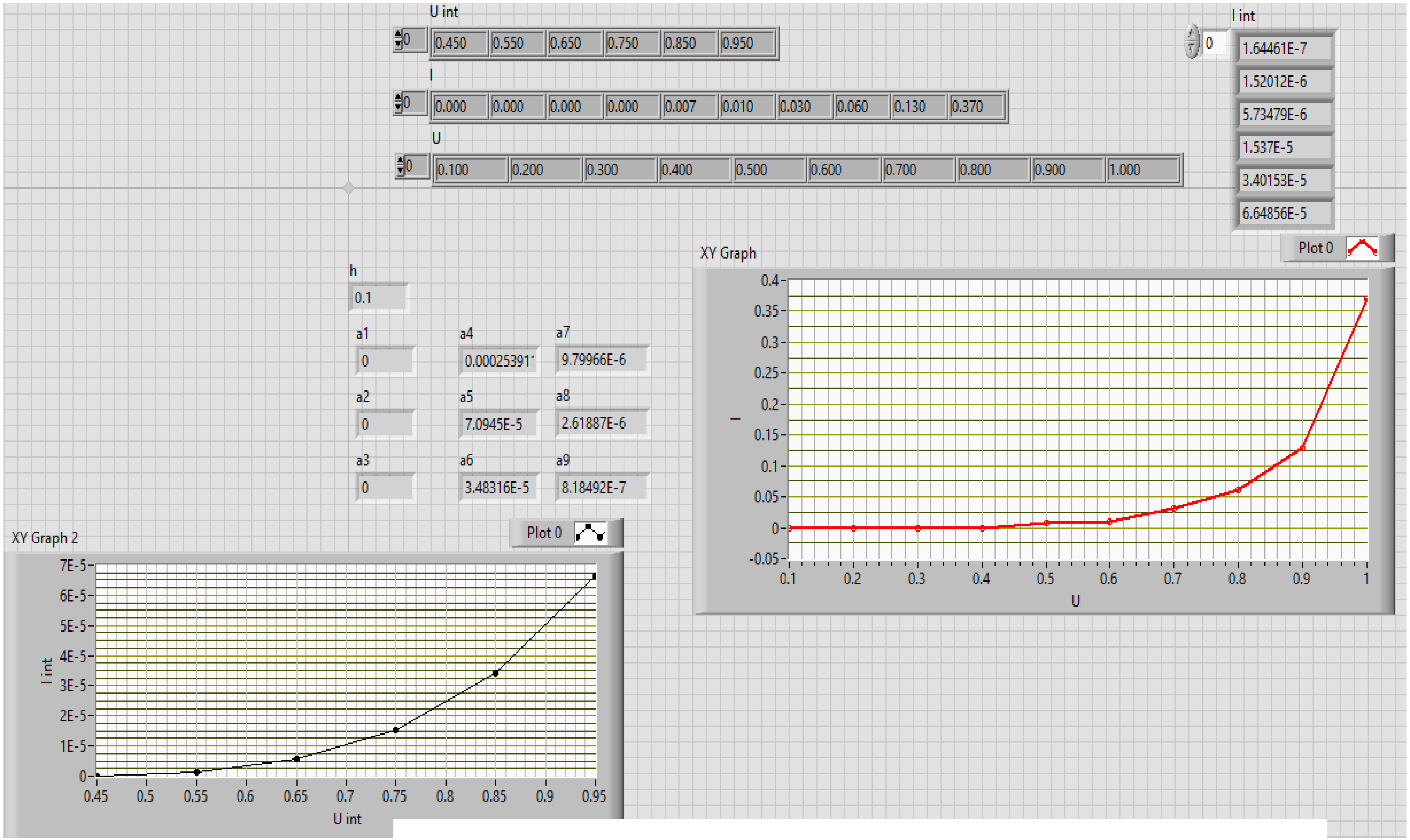


Рисунок 3.8- Результат інтерполювання за формулами Ньютона

При додаванні нових вузлів наведена формула більш зручна для обчислення , ніж запис інтерполяційного багаточлена у формі Лагранжа, тому що додавання нових вузлів інтерполяції тягне обчислення тільки нових доданків, доданих до тих ,які були обчислені з меншою кількістю вузлів. При використанні формули Лагранжа у цій ситуації необхідно виконувати усі обчислення знову.

3.2 Програмна реалізація методів інтерполяції у середовищі MATLAB

На основі теоретичного матеріалу, викладеного у розділі 2, будемо досліджувати методи інтерполяції у програмному середовищі MATLAB.

Інтерполяція поліномом Лагранжа

```
>> I=[0 0 0 0 0.007 0.01 0.03 0.06 0.13 0.37];
>> U=[0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1];
>> a=0.1;
>> b=1;
>> x=[0.1 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.85 0.95 1];  %x-масив координат вузлів
>> y=[0 0 0 0 0.007 0.01 0.03 0.06 0.13 0.37]; %y-масив значень  функції, що інтерполюється
>> xx=linspace(a,b,1000);
>> N=length(x);  % дізнаємось  число вузлів інтерполяції
>> L_n = zeros(size(xx));   % створимо  нульовий масив значень інтерполяційного полінома
% у циклі рахуємо суму за вузлами
>> for k=1:N
% обчислюємо добуток
P=ones(size(xx));
% у циклі рахуємо суму за вузлами
  for i=1:N
      if k~=i
          P=P.*(xx-x(i))./(x(k)-x(i));
         %.* - поелементний добуток
```

```
        %./ - поелементний поділ
end
  end
    L_n = L_n + y(k)*P; % накопичуємо суму
end
>>plot (U,I)
hold on
plot(xx,L_n,'r')
hold on
plot(x,y,'bo')
```

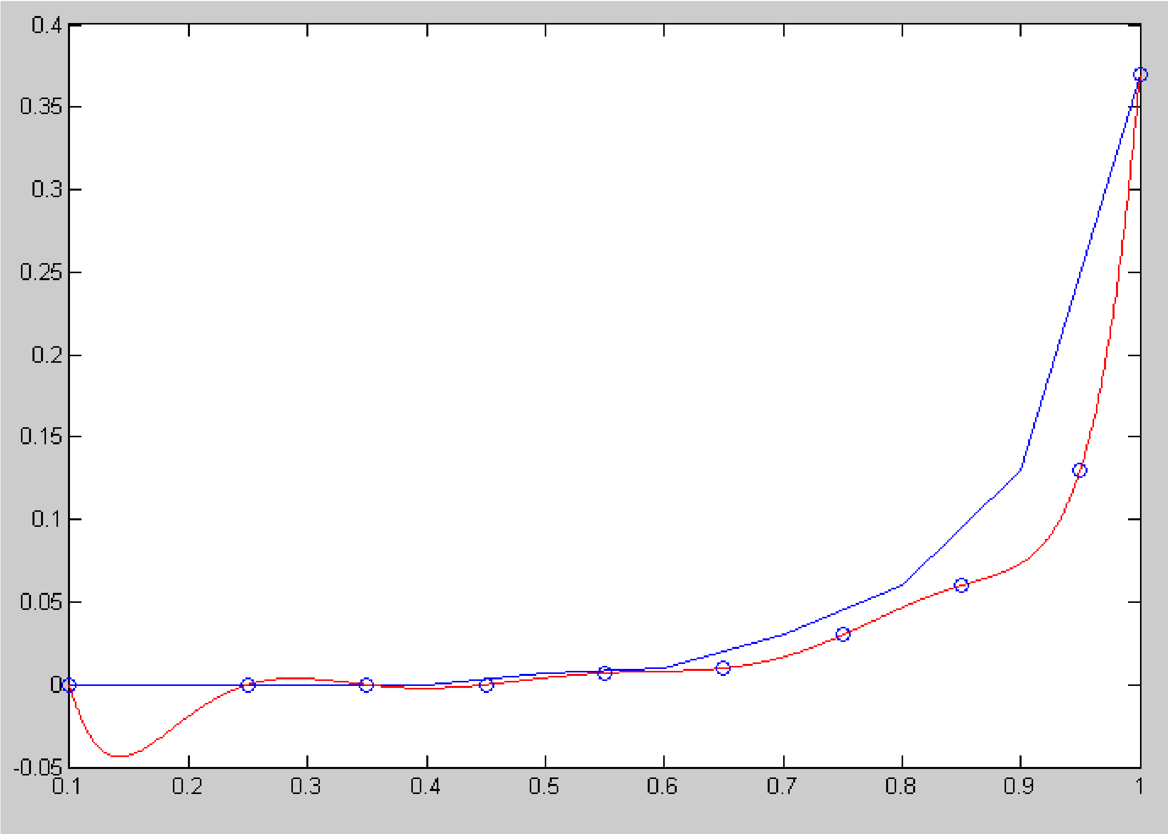


Рисунок 3.9- Графік інтерполяції багаточленом Лагранжа

Інтерполяція за формулами Ньютона

Створюємо окремий MATLAB-файл із назвою newton та запишемо туди наступний код:

```
function yy = newton(x, y, xx)
N = length(x);
DIFF = y;
for  k = 1 : N-1
for i = 1: N - k
DIFF(i) = (DIFF(i+1) - DIFF(i)) / (x(i+k) - x(i));
end
end
yy = DIFF(1) * ones(size(xx));
for k = 2 : N
yy = DIFF(k) + (xx - x(k)) .* yy;
end
```

У новому MATLAB- документі запишемо наступні команди:

```
>> I=[0 0 0 0 0.007 0.01 0.03 0.06 0.13 0.37];
>> U=[0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1];
>> x=[0.1 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.85 0.95 1];
>> y=[0 0 0 0 0.007 0.01 0.03 0.06 0.13 0.37];
>> xx = linspace(x(1), x(end), 100);
>> yy = newton(x, y, xx);
>> plot (U,I)
hold on
>> plot(x,y,'o',xx,yy)
```

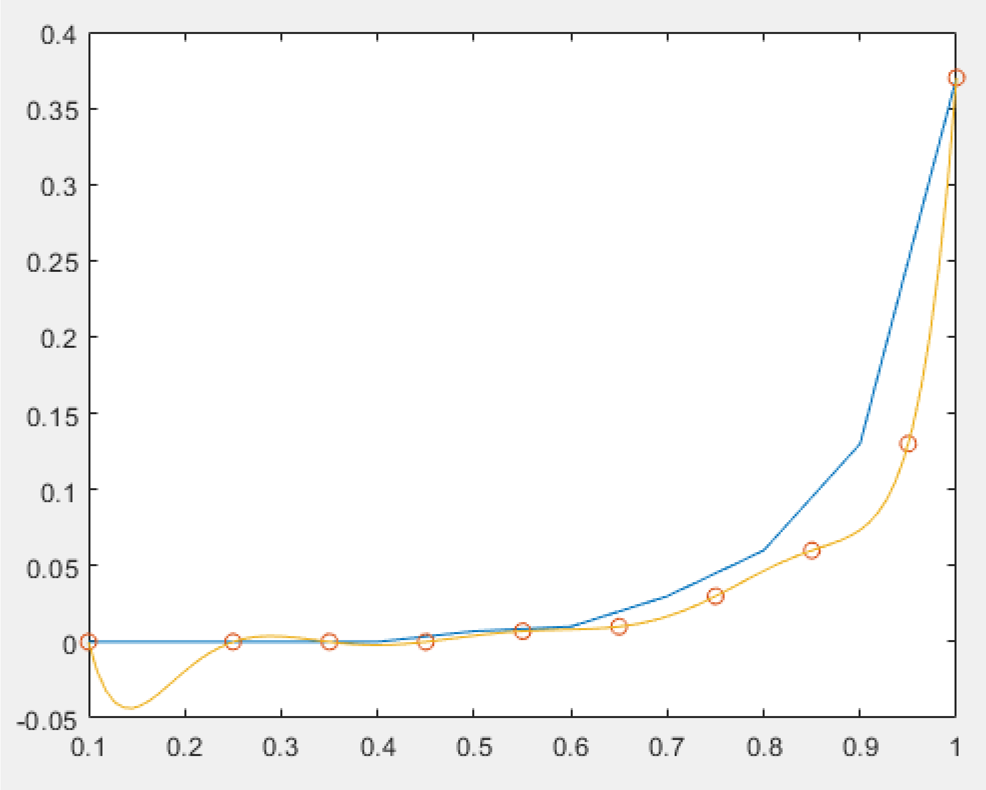


Рисунок 3.10- Графік інтерполяції за формулами Ньютона

Сплайн-інтерполяція за допомогою вбудованої функції MATLAB

```
>> I=[0 0 0 0 0.007 0.01 0.03 0.06 0.13 0.37];

>>U=[0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1];

>>x=[0.1 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.85 0.95 1];

>>y=[0 0 0 0 0.007 0.01 0.03 0.06 0.13 0.37];

>> yi=spline(x, y, xi);

>> plot (U,I)

hold on

>>plot(xi,yi)
```

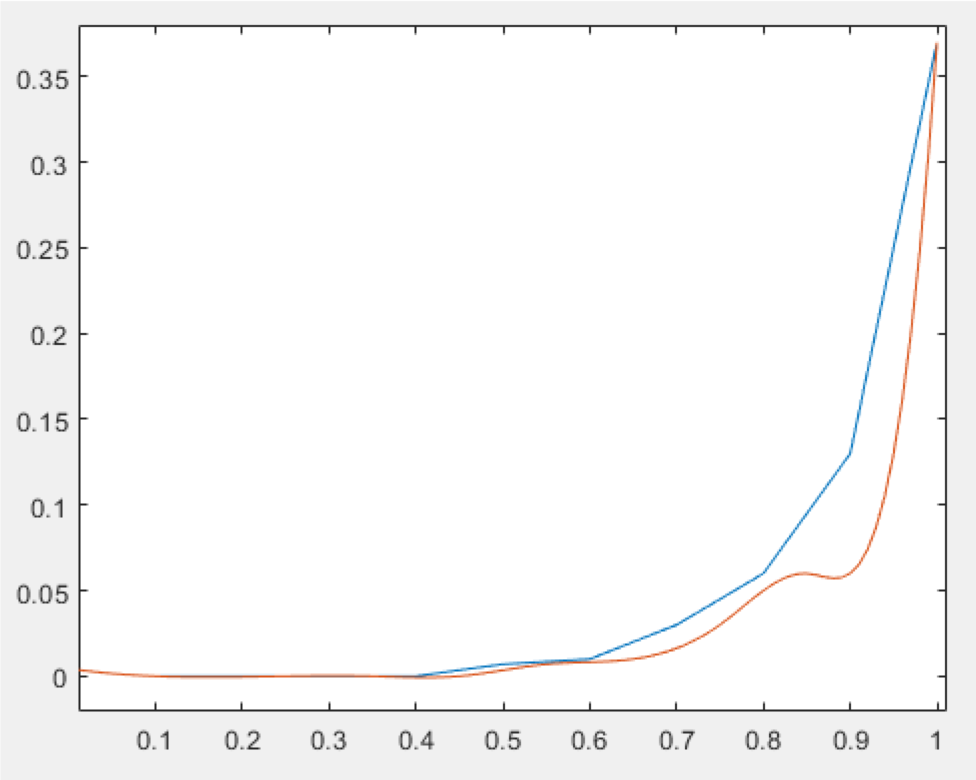


Рисунок 3.11- Графік інтерполяції за формулами Ньютона

3.3 Програмна реалізація методів інтерполяції у середовищі MathCAD

Інтерполяція поліномом Лагранжа.

$$ORIGIN := 0$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01 \\ 0.03 \\ 0.06 \\ 0.13 \\ 0.37 \end{pmatrix} \qquad n := 6$$

```
int_lagr(x,y,xf) := | n ← length(x)
                    | yf ← 0
                    | for i ∈ 0..n − 1
                    |     | p1 ← 1
                    |     | p2 ← 1
                    |     | for j ∈ 0..n − 1
                    |     |   if j ≠ i
                    |     |        | p1 ← p1·(xf − x_j)
                    |     |        | p2 ← p2·(x_i − x_j)
                    |     | yf ← yf + y_i·p1/p2
                    | yf
```

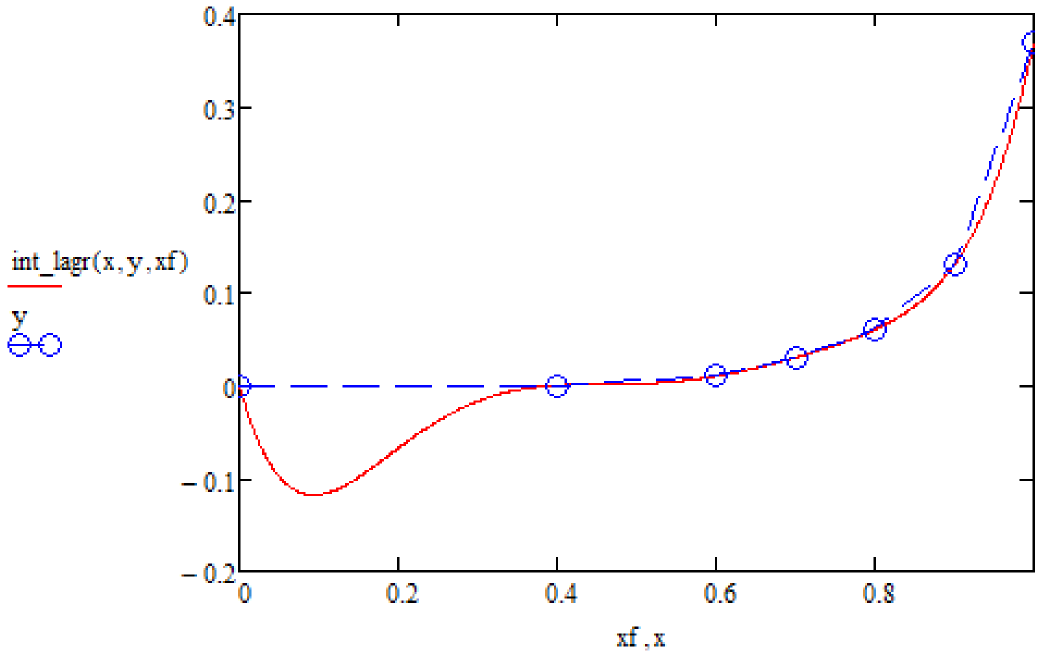


Рисунок 3.12- Графік інтерполяції поліномом Лагранжа

Інтерполяція за формулами Ньютона

У цій задачі будемо рахувати поліном Ньютона ступеня M, 1<M<N, використовуючи так звану першу(працює на початку відомого інтервалу) та другу (працює у кінці інтервалу) формули Ньютона .

$ORIGIN := 0 \qquad M := 6$

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01 \\ 0.03 \\ 0.06 \\ 0.13 \\ 0.37 \end{pmatrix}$$

Ступінь поліномів Ньютона

$N := \mathrm{length}(X) \qquad N = 7$

Побудова матриці кінцевих різниць порядків 1,2,...,M

$$D(X,Y,M) := \left| \begin{array}{l} N \leftarrow \mathrm{length}(Y) \\ \text{for } i \in 0..N-2 \\ \quad \Delta_{i,0} \leftarrow Y_{i+1} - Y_i \\ \text{for } j \in 1..M-1 \\ \quad \text{for } i \in 0..N-2-j \\ \qquad \Delta_{i,j} \leftarrow \Delta_{i+1,j-1} - \Delta_{i,j-1} \\ \Delta \end{array} \right.$$

$\Delta := D(X,Y,M)$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0.03 & 0.04 \\ 0.01 & 0.01 & 0 & 0.03 & 0.07 & 0 \\ 0.02 & 0.01 & 0.03 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0.04 & 0.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0.17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Реалізація першої формули Ньютона для заданого x за відомою матрицею кінцевих різниць Δ (використовується лише перша відома точка).

$$P_1(x,X,Y,\Delta) := \left| \begin{array}{l} \left(h \leftarrow X_1 - X_0 \quad p \leftarrow Y_0 \quad nf \leftarrow 1 \quad q \leftarrow \dfrac{x - X_0}{h} \quad qp \leftarrow q \right) \\ \text{for } j \in 1..\mathrm{cols}(\Delta) \\ \quad \left| \begin{array}{l} p \leftarrow p + \dfrac{\Delta_{0,j-1}}{nf} \cdot qp \\ nf \leftarrow nf \cdot (j+1) \\ qp \leftarrow qp \cdot (q - j) \end{array} \right. \\ p \end{array} \right.$$

Реалізація другої формули Ньютона для заданого x за відомою матрицею кінцевих різниць Δ (використовується лише остання відома точка).

$$P_2(x,X,Y,\Delta) := \left| \begin{array}{l} \left(N \leftarrow \mathrm{last}(X) \quad h \leftarrow X_N - X_{N-1} \quad p \leftarrow Y_N \quad nf \leftarrow 1 \quad q \leftarrow \dfrac{x - X_N}{h} \quad qp \leftarrow q \right) \\ \text{for } j \in 1..\mathrm{cols}(\Delta) \\ \quad \left| \begin{array}{l} p \leftarrow p + \dfrac{\Delta_{N-j,j-1}}{nf} \cdot qp \\ nf \leftarrow nf \cdot (j+1) \\ qp \leftarrow qp \cdot (q + j) \end{array} \right. \\ p \end{array} \right.$$

Для порівняння - реалізація за тими ж даними звичайного канонічного полінома

$$i := 0..\mathrm{last}(X) \qquad j := 0..\mathrm{last}(X) \qquad C_{i,j} := \left(X_i\right)^j \quad c := C^{-1} \cdot Y$$

$$P_0(x,c) := \left| \begin{array}{l} p \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..\mathrm{last}(c) \\ \quad p \leftarrow p + c_i \cdot x^i \\ p \end{array} \right.$$

Побудова 2 поліномів Ньютона та канонічного полінома у межах зміни X із заданим шагом dx.

$dx := 0.1 \qquad x := X_0, X_0 + dx .. X_{last(X)} \qquad i := 0 .. last(X)$

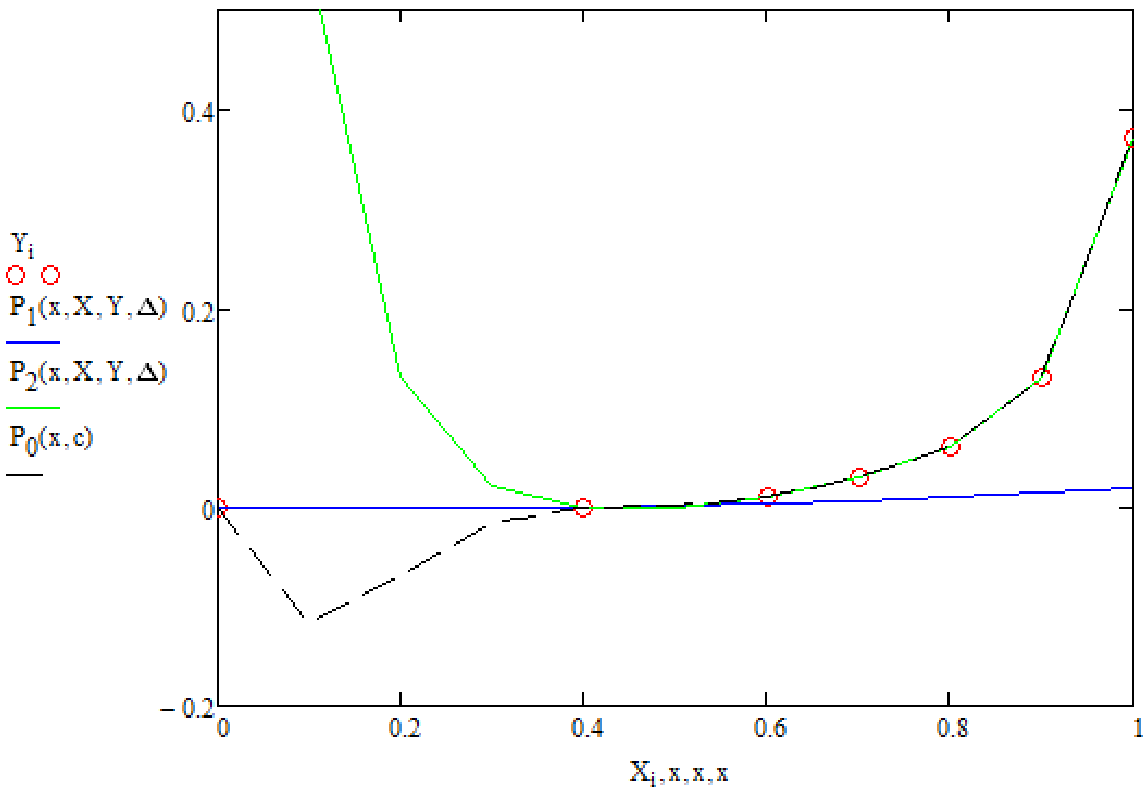


Рисунок 3.13- Результуючий графік порівняння інтерполяції канонічним поліномом та за формулами Ньютона

Кубічна сплайн-інтерполяція

У більшості практичних додатків бажано з’єднати експериментальні точки не ломаною лінією, а гладкою кривою. Найкраще для цих цілей підходить інтерполяція кубічними сплайнами, тобто відрізками кубічних парабол.

interp(s,x,y,t) – функція, що апроксимує дані векторів **x** та **y** кубічними сплайнами:

s – вектор других похідних, створений однією із супутних функцій cspline, pspline или Ispline;

x – вектор дійсних даних аргумента, елементи якого розташовані у порядку зростання;

y – вектор дійсних даних значень того ж розміру;

t – значення аргумента, при якому обчислюється інтерполююча функція.

Сплайн-інтерполяція у Mathcad реалізована трохи складніше лінійної.

Це відбувається за допомогою однієї із трьох вбудованих функцій тих самих аргументів (x, y):

- ispline (x, y) – вектор значень коефіцієнтів лінійного сплайна;
- pspiine(x,y) – вектор значень коефіцієнтів квадратичного сплайна;
- cspline (x, y) – вектор значень коефіцієнтів кубічного сплайна:

x, y – вектори даних.

Вибір конкретної функції сплайнових коефіцієнтів впливає на інтерполяцію поблизу кінцевих точок інтервала.

Сутність сплайн-інтерполяції полягає у тому, що у проміжках між точками здійснюється апроксимація у вигляді залежності $A(t)=at^3+bt^2+ct+d$. Коефіцієнти a, b, c, d розраховуються незалежно для кожного проміжку , виходячи із значень y* у сусідніх точках.

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01 \\ 0.03 \\ 0.06 \\ 0.13 \\ 0.37 \end{pmatrix} \qquad A(t) := \mathrm{interp}(s, X, Y, t)$$

$n := 6 \quad i := 0..6 \quad j := 0..6$

$s := \mathrm{cspline}(X, Y)$

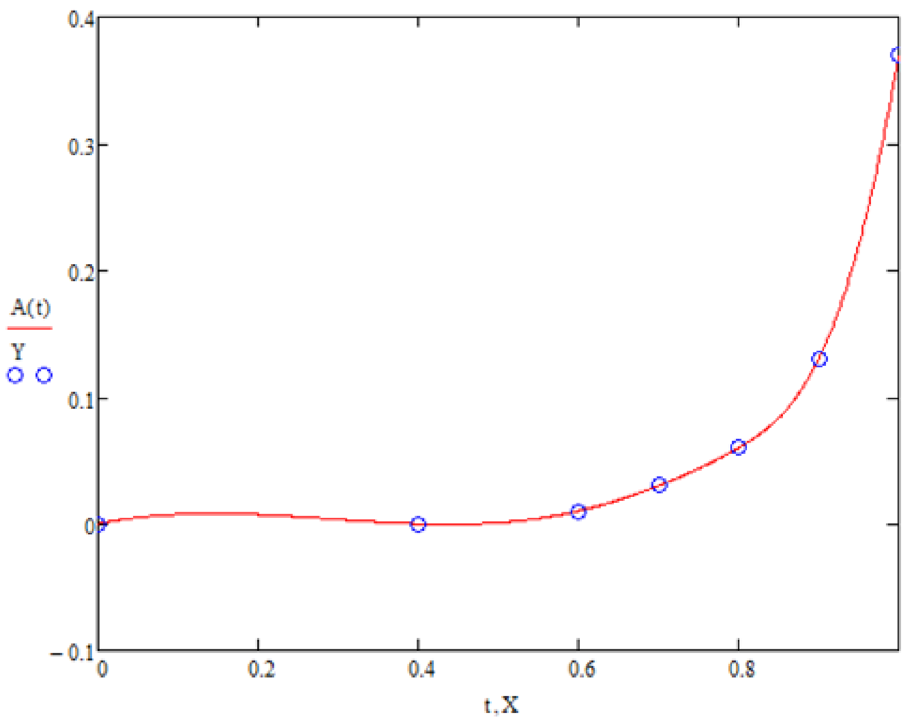


Рисунок 3.14- Інтерполяція кубічним сплайном

Щоб підкреслити різницю, відповідні різним допоміжним функціям cspline**,** pspline**,** ispline, наведемо результат дії при заміні функції cspline в передостанньому рядку на лінійну pspline **.**

n := 6 i := 0..6 j := 0..6

s := pspline(X, Y)

A(t) := interp(s, X, Y, t)

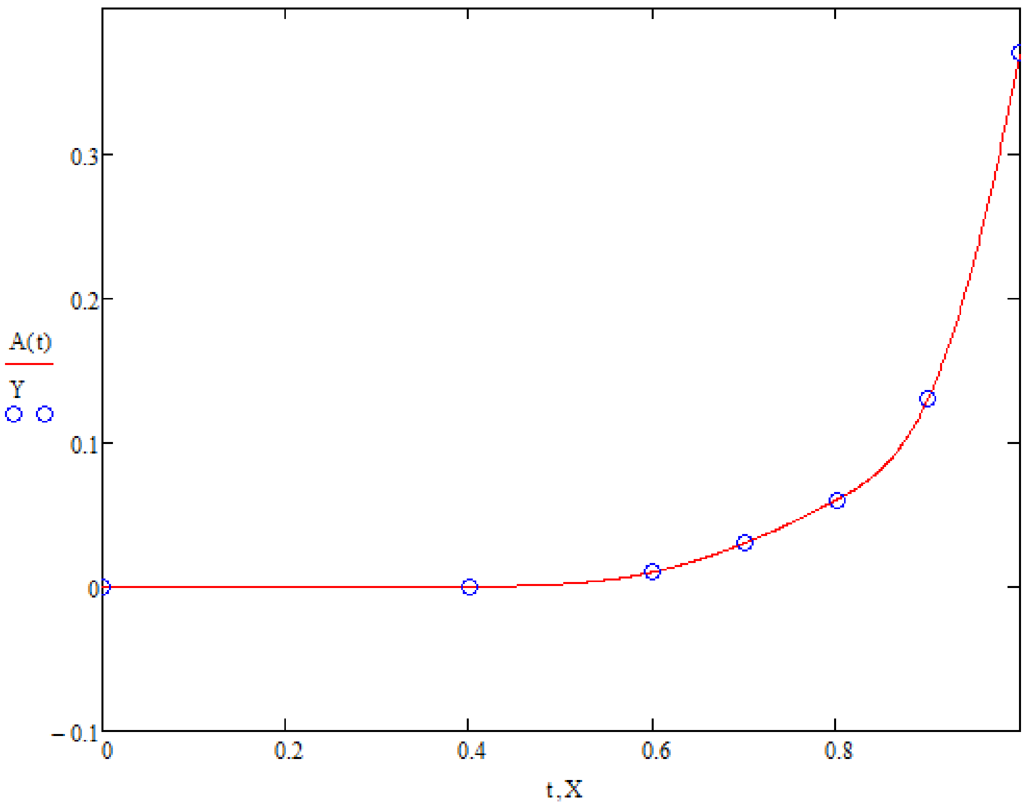


Рисунок 3.15- Інтерполяція квадратичним сплайном

Поліноміальна сплайн-інтерполяція

Більш складний тип інтерполяції – так звана інтерполяція B-сплайнами.

На відміну від звичайної сплайн-інтерполяції зшивка елементарних B-сплайнів відбувається не у точках x_i, а в інших точках u_i , координати яких запропоновано ввести користувачу. Сплайни можуть бути 1, 2 та 3 ступеню (лінійні, квадратичні або кубічні). Застосовується інтерполяція B-сплайнами також, як і звичайна, але різниця лише у визначенні допоміжної функції коефіцієнтів сплайна.

interp(s,x,y,t) – функція, що апроксимує дані векторів х та у за допомогою В-сплайнов.

bspline (x,y,u,n) – вектор значень коефіцієнтів В-сплайна:

s – вектор других похідних, створений функцією bspline;

x – вектор дійсних даних аргумента, елементи якого розташовані у порядку зростання;

y – вектор дійсних даних значень того ж розміру;

u – вектор значень аргумента, в якому відбувається зшивка В-сплайнов;

n – порядок поліномів інтерполяції (1, 2 або 3).

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01 \\ 0.03 \\ 0.06 \\ 0.13 \\ 0.37 \end{pmatrix} \qquad K := \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0.2 \\ 0.65 \\ 0.75 \\ 0.85 \\ 1.01 \end{pmatrix}$$

$$n := 6 \quad i := 0..6 \quad j := 0..6$$

$$s := \mathrm{bspline}(X, Y, K, 2)$$

$$A(t) := \mathrm{interp}(s, X, Y, t)$$

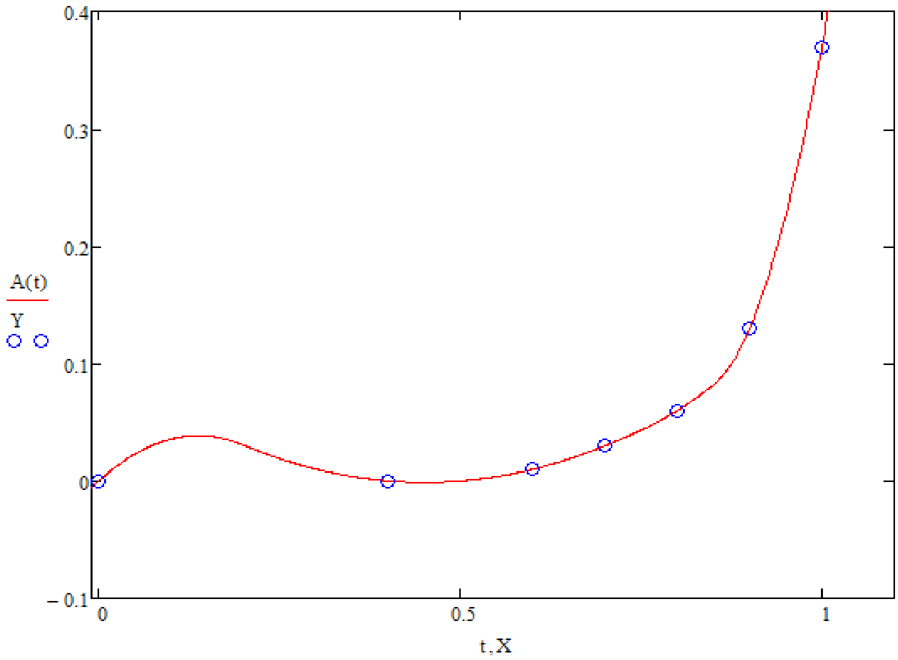


Рисунок 3.16- Результат інтерполяції В-сплайнами

4 РОЗРАХУНОК ТЕХНІКО-ЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

У даній магістерській дисертації досліджуються різні методи обробки результатів сумісних вимірювань, у результаті аналізу яких було встановлено, що методи інтерполяції є більш точним у порівнянні з іншими. Однак , використання методів інтерполяції потребує багато часу на їх використання через складні розрахунки, що надалі призводить до низки похибок та неточностей. У цій роботі були реалізовані алгоритми обробки результатів сумісних вимірювань методами інтерполяції за допомогою програмного сереседовища LabVIEW.

Таким чином метою даного розділу є обгрунтування доцільності впровадження системи обробки результатів сумісних вимірювань.

При впровадженні цієї системи очікується підвищення продуктивності праці та підвищиться точність результатів сумісних вимірювань.

4.1. Розрахунок (фіксованих) капітальних витрат

До фіксованих (капітальних) варто відносити наступні витрати:

-вартість розробки проекту системи автоматизованої обробки результатів вимірювань (розробка схем пристроїв, політики функціонування системи тощо);

- вартість первісних закупівель ліцензійного основного й додаткового програмного забезпечення (ПЗ);

- вартість створення основного й додаткового програмного забезпечення (ПЗ);

- витрати на первісні закупівлі апаратного забезпечення;

-витрати на інтеграцію програмного продукту у вже існуючу корпоративну систему (встановлення обладнання, програмного забезпечення та налагодження системи обробки результатів вимірювань);

- витрати на навчання технічних фахівців і обслуговуючого персоналу.

Проектні капіталовкладення в апаратне забезпечення та придбання ліцензійного основного й додаткового ПЗ визначаються на основі цін, наведених у прайс-листах відповідних фірм.

До проектних капіталовкладень відносяться:

1) Ноутбук HP ProBook 430 G4 вартістю 15 394 грн.

Інтернет-ресурс : https://rozetka.com.ua/hp_w6p97av_v9/p24523688/

2) Програмне забезпечення LabVIEW Base вартість якого становить $ 400.00, що еквівалентно 11550 грн за курсом НБУ.

Дані вказані станом на 19.01.2018 р.

Витрати на навчання технічних фахівців і обслуговуючого персоналу приймаються за фактичними затратами організації.

Витрати на інтеграцію системи автоматизованої обробки результатів вимірювань у вже існуючу корпоративну систему визначаються у відсотках до сумарної вартості обладнання та програмного забезпечення. (7-8%)

4.2 Визначення витрат на створення системи автоматизованої обробки результатів вимірювань

Визначення трудомісткості розробки та опрацювання програмного продукту

Трудомісткість створення ПЗ визначається тривалістю кожної робочої операції, починаючи з складання технічного завдання і закінчуючи оформленням документації (за умови роботи одного програміста):

$$t = t_{тз} + t_{в} + t_{а} + t_{пр} + t_{опр} + t_{д}, \text{ годин,} \tag{4.1}$$

де $t_{тз}$ – тривалість складання технічного завдання на розробку ПЗ;

$t_{в}$ – тривалість вивчення ТЗ, літературних джерел за темою тощо;

$t_{а}$ – тривалість розробки блок-схеми алгоритму;

$t_{пр}$ – тривалість програмування за готовою блок-схемою;

$t_{опр}$ – тривалість опрацювання програми на ПК;

$t_{д}$ – тривалість підготовки технічної документації на ПЗ.

Складові трудомісткості визначаються на підставі умовної кількості операторів у програмному продукті Q (з урахуванням можливих уточнень у процесі роботи над алгоритмом і програмою).

Умовна кількість операторів у програмі:

$$Q = q \cdot c\ (1 + p), \quad \text{штук}, \tag{4.2}$$

$$Q = 189 \cdot 1{,}4(1+0{,}1) = 292 \quad \text{штук}$$

де q – очікувана кількість операторів;

c – коефіцієнт складності програми;

p – коефіцієнт корекції програми в процесі її опрацювання.

Коефіцієнт складності програми ***c*** визначає відносну складність програми щодо типового завдання, складність якого дорівнює одиниці. Діапазон його зміни – 1,25...2,0.

Коефіцієнт корекції програми ***p*** визначає збільшення обсягу робіт за рахунок внесення змін в алгоритм або програму внаслідок уточнення технічного завдання. Його величина знаходиться в межах 0,05...0,1, що відповідає внесенню 3...5 корекцій і переробці 5-10% готової програми.

Тривалість вивчення технічного завдання, опрацювання довідкової літератури з урахуванням уточнення ТЗ і кваліфікації програміста можливо оцінити за формулою:

$$t_в = \frac{Q \cdot B}{(75...85) \cdot k}, \quad \text{годин}, \tag{4.3}$$

$$t_b = \frac{292 \cdot 1{,}3}{75 \cdot 0{,}8} = \frac{379{,}6}{60} = 6{,}32 \text{ годин}$$

де B – коефіцієнт збільшення тривалості етапу внаслідок недостатнього опису завдання, B = 1,2...1,5;

k – коефіцієнт, що враховує кваліфікацію програміста і визначається стажем роботи за фахом:

- до 2 років – 0,8;
- від 2 до 3 років – 1,0;
- від 3 до 5 років – 1,1...1,2;
- від 5 до 7 років – 1,3...1,4;
- понад 7 років – 1,5...1,6.

Тривалість розробки блок-схеми алгоритму:

$$ta = \frac{Q}{(20...25)\cdot k}\text{, годин.} \tag{4.4}$$

$$t_a = \frac{292}{22 \cdot 0.8} = \frac{292}{17,6} = 16,59 \text{ годин}$$

Тривалість складання програми за готовою блок-схемою:

$$tnp = \frac{Q}{(20...25)\cdot k}\text{, годин.} \tag{4.5}$$

$$t_{np} = \frac{292}{25 \cdot 0.8} = \frac{292}{20} = 14,6 \text{ годин}$$

Тривалість опрацювання програми на ПК:

$$tonp = \frac{1,5Q}{(4...5)\cdot k}\text{, годин.} \tag{4.6}$$

$$t_{onp} = \frac{1.5 \cdot 292}{5 \cdot 0.8} = \frac{438}{4} = 109,5 \text{ годин}$$

Тривалість підготовки технічної документації на ПЗ:

$$t_Д = \frac{Q}{(15...20) \cdot k} + \frac{Q}{(15...20)} \cdot 0{,}75 \quad \text{, годин} \tag{4.7}$$

$$t_д = \frac{292}{22 \cdot 0.8} = \frac{292}{17{,}6} = 16{,}59 \text{ годин}$$

Таким чином трудомісткість створення ПЗ дорівнюватиме :

t = 12+6,32+16,59+14,6+109,5+16,59= 176 годин

Розрахунок витрат на створення програмного продукту

Витрати на створення програмного продукту $К_{пз}$ складаються з витрат на заробітну плату виконавця програмного забезпечення $З_{зп}$ і вартості витрат машинного часу, що необхідний для опрацювання програми на ПК $З_{мч}$:

$$К_{пз} = З_{зп} + З_{мч} . \tag{4.8}$$

Заробітна плата виконавця враховує основну і додаткову заробітну плату, а також відрахування на соціальні потреби (пенсійне страхування, страхування на випадок безробіття, соціальне страхування тощо) и визначається за формулою:

$$З_{ЗП} = t \cdot З_{пр}, \quad \text{грн,} \tag{4.9}$$

де t – загальна тривалість створення ПЗ, годин;

$З_{пр}$ – средньогодинна заробітна плата програміста з нарахуваннями, грн/годину.

$$З_{пр}^{осн} = \frac{8000 \cdot 176}{21 \cdot 9 \cdot (1 + 0{,}1)} = \frac{1408000}{207{,}9} = 6772{,}48 \text{ грн}$$

$$З_{пр}^{дод} = 6772{,}48 \cdot 0{,}1 = 677{,}24 \text{ грн}$$

$$Зпр = 6772{,}48+677{,}24=7449{,}72 \text{ грн}$$

Відрахування на соціальні потреби : 7449,72 ·0,21 = 1564,44 грн
Витрати по заробітній платі на працівника становлять:

$$З_{\text{пр з відрах.}} = 7449{,}72 + 1564{,}44 = 9014{,}16 \text{ грн}$$

9014,16 грн – 21 день, тому заробітна плата за 1 робочий день складатиме 9014,16 грн : 21 день =429,24 грн/день. Средньогодинна заробітна плата програміста з нарахуваннями дорівнює :
429,24 грн/день : 9 годин =47,69 грн/год.

$$З_{зп} = 176\cdot 47{,}69=8393{,}44 \text{ грн}$$

Вартість машинного часу для налагодження програми на ПК визначається за формулою:

$$З_{мч} = t_{опр}\cdot C_{мч} + t_{д}\cdot С_{мч}\ \text{, грн,} \qquad (4.10)$$

де $t_{опр}$ – трудомісткість налагодження програми на ПК, годин;
$t_{д}$ – трудомісткість підготовки документації на ПК, годин;
$С_{мч}$ – вартість 1 години машинного часу ПК, грн./година.

Вартість 1 години машинного часу ПК визначається за формулою:

$$С_{мч} = P\cdot t\cdot C_e + \frac{Ф_{зал}\cdot Н_а}{F_p} + \frac{К_{лпз}\cdot Н_{апз}}{F_p}\text{ , грн} \qquad (4.11)$$

де Р – встановлена потужність ПК, кВт;
$С_е$ – тариф на електричну енергію, грн/кВт·година;
t – час роботи ПК (t =1 година);

$Ф_{зал}$ – залишкова вартість ПК на поточний рік, грн.;

$Н_{а}$ – річна норма амортизації на ПК, частки одиниці;

$Н_{апз}$ – річна норма амортизації на ліцензійне програмне забезпечення, частки одиниці;

$К_{лпз}$ – вартість ліцензійного програмного забезпечення, грн.;

$F_{р}$ – річний фонд робочого часу

Річний фонд робочого часу складає :

$F_{р}$ = календарний фонд(365 днів) – вихідні дні(104 дні) –святкові дні(11 днів) –відпустка (24 дні) -невихід на роботу(12 днів)

У годинах:

$F_{р}$ = (365-104-11-24-12) днів ·9 годин/день = 1926 годин

$$С_{мч} = 0{,}085 \cdot 1 \cdot 1{,}94 + \frac{7697 \cdot 0{,}5}{1926} + \frac{11550 \cdot 0{,}5}{1926} = 5{,}14 \text{ грн/годину}$$

$$З_{мч} = 109{,}5 \cdot 5{,}14 + 16{,}59 \cdot 5{,}14 = 645{,}1 \text{ грн}$$

Витрати на створення програмного продукту $К_{пз}$ складають:

$К_{пз}$ =8393,44+645,1= 9038,54 грн

Визначена таким чином вартість створення програмного забезпечення $К_{пз}$ є частиною одноразових капітальних витрат разом з витратами на придбання і налагодження апаратури системи автоматизованої обробки результатів вимірювань.

Таким чином, капітальні (фіксовані) витрати на проектування та впровадження проектного варіанта системи автоматизованої обробки результатів вимірювань складають:

$$К = К_{пр} + К_{зпз} + К_{пз} + К_{аз} + К_{навч} + К_{н} , \qquad (4.12)$$

$$К= 9014,16+11550+8393,44+0+423,2+0=29380,8 \text{ грн}$$

де $К_{пр}$ – вартість розробки проекту автоматизованої обробки результатів вимірювань та залучення для цього зовнішніх консультантів, тис. грн;

$К_{зпз}$ – вартість закупівель ліцензійного основного й додаткового програмного забезпечення (ПЗ), грн;

$К_{пз}$ – вартість створення основного й додаткового програмного забезпечення, грн;

$К_{аз}$ – вартість закупівлі апаратного забезпечення та допоміжних матеріалів, грн;

$К_{навч}$ –витрати на навчання технічних фахівців і обслуговуючого персоналу, грн;

$К_{н}$ – витрати на встановлення обладнання та налагодження автоматизованої обробки результатів вимірювань, грн.

Розрахунок поточних (експлуатаційних) витрат

Експлуатаційні витрати – це поточні витрати на експлуатацію та обслуговування об'єкта проектування за визначений період (наприклад, рік), що виражені у грошовій формі.

До поточних (експлуатаційних) варто відносити наступні витрати:

- вартість Upgrade-відновлення й модернізації системи ($С_{в}$);
- витрати на керування системою в цілому ($С_{к}$);
- витрати, викликані активністю користувачів системи автоматизованої обробки результатів вимірювань($С_{ак}$ – "активність користувача").

Річні поточні (експлуатаційні) витрати на функціонування системи автоматизованої обробки результатів вимірювань знаходять за формулою:

$$С = С_{в} + С_{к} + С_{ак} , \quad \text{тис. грн.} \qquad (4.13)$$

$C_в = 29380{,}8 \cdot 0{,}21 = 6169{,}96$ грн

$C_{ак} = 29380{,}8 \cdot 0{,}46 = 13515{,}168$ грн

Витрати на Upgrade-відновлення й модернізацію системи автоматизованої обробки результатів вимірювань ($C_в$) можна визначити на підставі фактичних даних організації або користуючись даними табл. 4.1, про вагові частки статей витрат у сукупній вартості системи автоматизованої обробки результатів вимірювань.

Таблиця 4.1- Вагові частки статей витрат у сукупній вартості

Фіксовані (капітальні) вкладення	21%
Поточні витрати, у т.ч.	79%
Керування системою	12%
Технічна підтримка й відновлення	21%
Активність користувача	46%

Витрати на керування системою автоматизованої обробки результатів вимірювань ($C_к$) знаходять за формулою:

$$C_к = C_н + C_з + C_{ел} + C_{тос}, \text{ грн.} \qquad (4.14)$$

Витрати на навчання адміністративного персоналу й кінцевих користувачів визначаються за даними організації з проведення тренінгів персоналу, курсів підвищення кваліфікації тощо ($C_н$).

Річний фонд заробітної плати інженерно-технічного персоналу, що обслуговує систему інформаційної безпеки ($C_з$), складає:

$$C_з = З_{осн} + З_{дод}, \text{ грн.} \qquad (4.15)$$

$$C_з = 8000+800 =8800 \text{ грн}$$

де $З_{осн}$, $З_{дод}$ – основна і додаткова заробітна плата відповідно, грн на рік.

Основна заробітна плата визначається, виходячи з місячного посадового окладу, а додаткова заробітна плата – в розмірі 8-10% від основної заробітної плати.

$$З_{осн} = 8000 \text{ грн}$$

$$З_{дод} = 8000 \cdot 0{,}1 = 800 \text{ грн}$$

Вартість електроенергії, що споживається апаратурою системи автоматизованої обробки результатів вимірювань протягом року (Сел), визначається за формулою:

$$C_{ел} = P \cdot Fp \cdot Це \text{ , грн,} \qquad (4.16)$$

$$C_{ел} = 0{,}085 \cdot 1920 \cdot 1{,}68 = 274{,}85 \text{грн}$$

де P – встановлена потужність апаратури інформаційної безпеки, кВт;

$F_р$ – річний фонд робочого часу системи автоматизованої обробки результатів вимірювань;

$Ц_е$ – тариф на електроенергію, грн/кВт·годин.

Витрати на технічне й організаційне адміністрування та сервіс системи автоматизованої обробки результатів ($C_{тос}$) визначаються за даними організації або у відсотках від вартості капітальних витрат (1-3%).

$$C_{тос} = 29151{,}32 \cdot 0{,}1 = 291{,}51 \text{ грн}$$

Витрати, викликані активністю користувачів системи автоматизованої обробки результатів ($C_{ак}$) можна орієнтовно визначити, користуючись даними табл. 4.1 про вагові частки статей витрат у сукупній вартості системи автоматизованої обробки результатів.

Таким чином витрати на керування системою автоматизованої обробки результатів вимірювань дорівнюють:

$$С_к = 0+8800+274,85+293,80 = 9368,65 \text{ грн}$$

Отже, річні поточні (експлуатаційні) витрати складають:

$$С = 6169,96 + 9368,65 + 13515,168 = 29053,77 \text{ грн}$$

4.3 Розрахунок економії завдяки збільшенню продуктивності праці користувача

Якщо користувач при при економії i-виду із застосуванням програми заощаджує ΔT_i годин, то підвищення продуктивності праці P_i (у %) визначається за формулою:

$$P_i = \left(\frac{\Delta T_j}{F_j - \Delta T_j}\right) \cdot 100\,, \tag{4.17}$$

Де F_j – час, який планувався користувачем для виконання роботи j – до впровадження програми (час).

Таблиця 4.2- Робота користувача

№	Вид робіт	До автоматизації F_j, хв	Після автоматизації $F_{j(\text{авт})}$, хв	Економія часу ΔT_i, хв
1	Введення інформації	10	5	5
2	Проведення розрахунків	120	5	115
3	Підготовка звіту	40	10	30
4	Аналіз та вибірка даних	45	10	35

Економія, що пов'язана з підвищенням продуктивності праці користувача на виконання одного завдання Р знайдемо за формулою:

$$\Delta P = z_n \sum_i \frac{P_i}{100} \tag{4.18}$$

де z_n –середньгодинна заробітна плата користувача.

$$\Delta P = 47{,}69 \cdot \left(\frac{5 \cdot 100}{10-5} + \frac{115 \cdot 100}{120-118} + \frac{30 \cdot 100}{40-30} + \frac{35 \cdot 100}{45-35}\right)$$
$$= 47{,}69 \cdot (100 + 5750 + 300 + 350) = 47{,}69 \cdot 6500$$
$$= 309985 \text{ грн/рік}$$

Річні поточні (експлуатаційні) витрати складають 29380,8 грн/рік

Період окупності складає :

29380,8 грн/рік : 309985 грн/рік =0,095

Економічний ефект від впровадження системи автоматизованої обробки результатів вимірювань складає:

309985-29380,8=280604,2 грн.

Загальна економічна ефективність капітальних вкладень у розробку системи обробки результатів вимірювань($Е_з$) визначається діленням річного обсягу повного економічного ефекту (виключаючи експлуатаційні витрати на утримання і обслуговування системи на суму капітальних вкладень, що забезпечили цей результат:

280604,2 грн/рік : 29380,8 грн/рік = 9,55

Нормативне значення коефіцієнта повернення інвестицій:

(Nкр + Nінф)/100 (4.19)

(47,5% +101%)/100= 1,485

де Nкр – банківська кредитна ставка, %;

Nінф – річний рівень інфляції, %.

1,485 ≤ 9,55 ,тому можна зробити висновок про те, що проект є економічно доцільним.

Висновок

Виходячи з цих даних, можна зробити висновок про те, що економічний ефект від впровадження системи автоматизованої обробки результатів вимірювань складає 280604,2 грн. Загальна економічна ефективність перевищує нормоване значення, отже проект впровадження системи обробки результатів вимірювань можна вважати економічно доцільним.

ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі були розглянуті основні методи та засоби обробки результатів сумісних вимірювань.

Вихідними даними для цієї роботи є результати натурного експерименту.

На основі цього експерименту були розглянуті три метода інтерполяції такі як:

-інтерполювання багаточленом Лагранжа;

-інтерполювання за формулами Ньютона;

-сплайн-інтерполяція.

Для кожного з методів інтерполяції був розроблен алгоритм програмування у середовищі розробки. Для реалізації методів інтерполяції були обрані три програмні середовища, а саме:

-LabVIEW;

-MATLAB;

-MathCAD.

У кожного з середовищ програмування наявні вбудовані функції інтерполювання. Проте інтерполювання за формулами Ньютона у середовищах LabVIEW, MATLAB та MathCAD було виконано шляхом безпосереднього введення елементів програмного коду. Такий підхід показав, , що наявність вбудованих функцій у програмному середовищі значною мірою прискорює процес обробки результатів сумісних вимірювань.

За результатами обробки даних натурного експерименту методами інтерполяції, було встановлено, що інтерполювання сплайнами найбільш точно з’єднує експериментальні точки за рахунок гладкості інтерполюючої кривої.

Найбільш зручним та функціональним було визначено середовище графічного програмування LabVIEW. Виходячи з цих міркувань, у розділі економіки представлено техніко-економічне обґрунтування від впровадження даного програмного забезпечення в умовах робочого процесу; зроблено висновок про доцільність впровадження даного програмного забезпечення у метрологічних службах з метою підвищення продуктивності праці через зменшення часових витрат на обробку результатів сумісних вимірювань.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1) Рубан Г.Я. Теорія електричних та магнітних кіл. Курс лекцій Черкаси, 2013 р. – 110 с.

2) Основы теории цепей [Электронный ресурс] : Учебное пособие для вузов / Под ред. В.П. Бакалова. - 4-е изд. - М. : Горячая линия - Телеком, 2013. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785991203296.html

3) Михалевич В.Т., Денисюк В.Ю. Метрологія, технологічні вимірювання та прилади. Навчальний посібник. – Луцьк: СПД Гадяк Жанна Володимирівна друкарня "Волиньполіграф»ТМ, 2014. – 254 с.

http://elib.lutsk-ntu.com.ua/book/fepes/pruladobyd/2015/15-09/other/tema_3__obrobka_rezul_tativ_vimiryuvan_.pdf

4) І.Я. Співак. Математичне забезпечення систем. / Опорний конспект лекцій для студентів напрямку "*Програмна* інженерія". – Тернопіль, 2012. – 95 с.

5) Інтернет ресурс: Комп'ютерні методи дослідження та аналіз даних.; Режим доступу : http://posibnyky.vntu.edu.ua/met/lek5.htm#521ynterpolyacyjnijbagatochlenlagra

6) Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов.- М.:Директ-Медиа,2013.-847 стр.

7) Довгий Б.П. Д Сплайн-функції та їх застосування / Б.П.Довгий, А.В.Ловейкін, Є.С.Вакал, Ю.Є.Вакал. – К.:Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. – 117 с. ISBN

8) Інтернет ресурс: Прикладная и инженерная математика. Численные методы.Интерполяция функций. Режим доступу : http://www.simumath.net/library/book.html?code=Interpol_splines

9) Суранов А. Я. LabVIEW 8.20: Справочник по функциям. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 536 с.

10) Дьяконов В. П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.: ил.

11) Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. – М.-СПб.-Киев: Вильямс, 2001.

12) Тарасевич Ю. Ю. Численные методы на Mathcad’е. – Астраханский гос. пед. ун-т: Астрахань, 2000.

13) Методичні вказівки до виконання економічної частини дипломного проекту (для студентів напряму підготовки 1701 Інформаційна безпека)/ Упорядн.: І.В. Шереметьєва, Д.П. Пілова, Н.М. Романюк. – Дніпропетровськ: ДВНЗ "Національний гірничий університет", 2011. – 17 с.